Fraktale Geometrie

Autor(en): **Blatter, Christian**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **47 (1992)**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-43912

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

El. Math., *47*, (1992)

0013-6018/92/020062-14$1.50 + 0.20/0
© 1992 Birkhäuser Verlag, Basel

Fraktale Geometrie

Christian Blatter
ETH Zürich

Christian Blatter, geboren 1935, studierte in Basel und promovierte 1960 bei Heinz Huber über "Extremallängen auf geschlossenen Flächen". Nach zwei Jahren als Visiting Assistant Professor in Stanford trat er 1964 in den Dienst der ETH Zürich und ist dort seit 1979 ordentlicher Professor für Mathematik. Neben verschiedenen Arbeiten im Kreuzungsgebiet von Funktionentheorie und Differentialgeometrie hat er ein Lehrbuch der Analysis für Mathematiker und Physiker verfasst, das 1991/92 in vollständig neu bearbeiteter vierter Auflage erscheint.

Wohl kaum je zuvor haben mathematische Objekte die Einbildungskraft des allgemeinen Publikums in derart intensiver Weise beschäftigt wie in den letzten Jahren Fraktale und Chaos. Die farbigen Bilder, die B.B. Mandelbrot und H.-O. Peitgen in ihren Büchern und Ausstellungen zeigten, vermochten die visuellen Sinne in einem Masse anzusprechen, wie es sonst nur Kunstwerke tun können. Viele, die sich an diesen Bildern erfreuten, hatten die Mathematik, wohl nicht zuletzt auf Grund ihrer eigenen (Schul-)Erfahrungen, als etwas Trockenes und Verstaubtes in Erinnerung, und waren jetzt über die Attraktivität dieser aus der Mathematik entstandenen Bilder erstaunt. Mathematisch Tätige liessen sich von der ästhetischen Kraft der Bilder weniger überraschen: Sie haben immer schon von der inneren Ästhetik ihres Faches gewusst. Nicht selten machen sie ja diese sogar zum Leitfaden ihrer Beschäftigung, etwa dann, wenn sie von einem besonders *schönen* mathematischen Satz sprechen und dafür einen besonders *eleganten* Beweis erbringen. Vielleicht wird diese innere Schönheit der Mathematik, die wohl nur den damit Beschäftigten unmittelbar zugänglich ist, in den Bildern von Fraktalen und von Chaos für einmal auch wirklich *für das Auge* sichtbar. – Nun ist zweifellos das Betrachten und Geniessen von Bildern nicht dem Verstehen gleichzusetzen; letzteres ist auch in diesem Gebiet Ziel der mathematischen Betätigung. In seinem Artikel *Fraktale Geometrie* geht Christian Blatter besonders auf den Begriff der fraktalen Dimension ein. Wie die Definition erwarten lässt, braucht diese Dimension im allgemeinen nicht ganzzahlig zu sein: es ist eine dem geometrischen Gebilde zugeordnete reelle Masszahl. Der Beitrag diskutiert diesen Begriff eingehend und illustriert die Überlegungen an vielen Beispielen.

Beim Text handelt es sich um eine überarbeitete Fassung eines Vortrages, welcher im Wintersemester 1989/90 im Seminar für Mathematik und Unterricht der ETH Zürich gehalten wurde. *ust*

Die Figuren, die wir in der Geometrie gewöhnlich betrachtet haben, lassen sich mit Hilfe von geraden oder krummen, aber jedenfalls glatten Kurven oder Flächen beschreiben. Fraktale hingegen sind Mengen in der Ebene oder im Raum, die in eigentümlicher Weise "ausgefranst" sind. "Fraktal" ist kein kanonisierter mathematischer Begriff, sondern ein Syndrom, das mit einem oder mehreren der folgenden Symptome verknüpft ist:

- Ausfransung,
- "zufällige" Formen und Grenzen,
- scheinbar hoher Informationsgehalt bzw. große Komplexität,
- interessante Gestaltmerkmale in allen Maßstäben,
- Selbstähnlichkeit,
- Hausdorff-Dimension nicht ganzzahlig,
- ...

Die fraktale Betrachtungsweise ist in erster Linie eine neuartige mathematische Beschreibungsmethode für gewisse Phänomene und Objekte, die gerade wegen der angeführten Symptome für mathematisch unbeschreibbar gehalten wurden. Es ist aber keine Rede davon, daß es sich bei der "fraktalen Geometrie" um eine neue Geometrie handelt, die die alte ablöst. Man hat nur begonnen, eine neue Art von Figuren zu zeichnen, zu vermessen und in der Natur aufzusuchen. Was das "Vermessen" anbetrifft, so haben die Fraktale weder eine interessante Länge noch Breite; ihr wesentliches Charakteristikum ist vielmehr die in den kleinsten Teilbereichen manifeste "Zusammenhangsdichte". Diese *fraktale Dimension* — es gibt verschiedene Varianten davon — kann eine gebrochene Zahl sein, was dem ganzen seinen Namen gegeben hat. Im Gegensatz dazu ist die *topologische Dimension* eines Raumes X immer ganzzahlig. Es war vielleicht unglücklich, die fraktale Dimension überhaupt eine Dimension zu nennen. Diese gebrochenen Dimensionszahlen haben etwas Mystisches; dabei handelt es sich einfach um bestimmte Maßzahlen, die genauso wenig ganzzahlig sein müssen wie eine Länge oder das Achsenverhältnis einer Ellipse. Folgendes ist allerdings immer richtig:

$$\dim_{\text{top}}(X) \leq \dim_{\text{frac}}(X) .$$

Fraktale gibt es als mathematische Objekte; sie kommen aber auch in der Natur vor: die Küstenlinie von England, Wolkenformen, Schneekristalle, Brownsche Pfade, die menschliche Lunge. Ins öffentliche Bewußtsein gerückt wurden sie durch Benoit Mandelbrot, der mit seinem Werk *Die fraktale Geometrie der Natur* (Birkhäuser 1988; erste englische Auflage: Fractals, 1977) einen eigentlichen fraktalen Boom ausgelöst hat: Im Augenblick sind die Fraktale ein beliebter Forschungsgegenstand quer durch die exakten Wissenschaften. Dabei interessieren die folgenden Fragen:

(a) Fraktale in der Natur

- empirische Bestimmung der Hausdorff-Dimension,
- Erklärung der fraktalen Struktur aus dem Entstehungsmechanismus,
- Modellierung des Wachstums- und Verzweigungsprozesses ("generative Grammatik", "L-Systeme");

(b) mathematische Fraktale

- Dimensionsbestimmung aus den definierenden Daten,
- wahrscheinlichkeitstheoretische Analyse des Entstehungsprozesses,
- einfache Modelle für natürliche Fraktale; ihre Herstellung auf dem Computer,
- Erarbeitung von präzisen Begriffen zur Beschreibung der vorgefundenen Phänomene.

Das älteste erdachte Fraktal ist die berühmte Cantor-Menge (1883). Sie wird im allgemeinen folgendermaßen erklärt: Aus dem Intervall $C_0 := [0, 1]$ wird das offene mittlere Drittel entfernt, aus den beiden übrigbleibenden Teilintervallen je wieder das offene mittlere Drittel, undsoweiter ad infinitum. Was am Schluß übrigbleibt, ist die *Cantor-Menge* C. Diese Menge spielt seit altersher eine wichtige Rolle als Modellraum in der allgemeinen Topologie; sie besteht aus allen Zahlen $t \in [0, 1]$, die eine triadische Entwicklung der Form

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{3^k}, \qquad \text{alle } \epsilon_k \in \{0, 2\} \quad (\text{d.h. } \epsilon_k \neq 1)$$

besitzen, und ist überabzählbar.

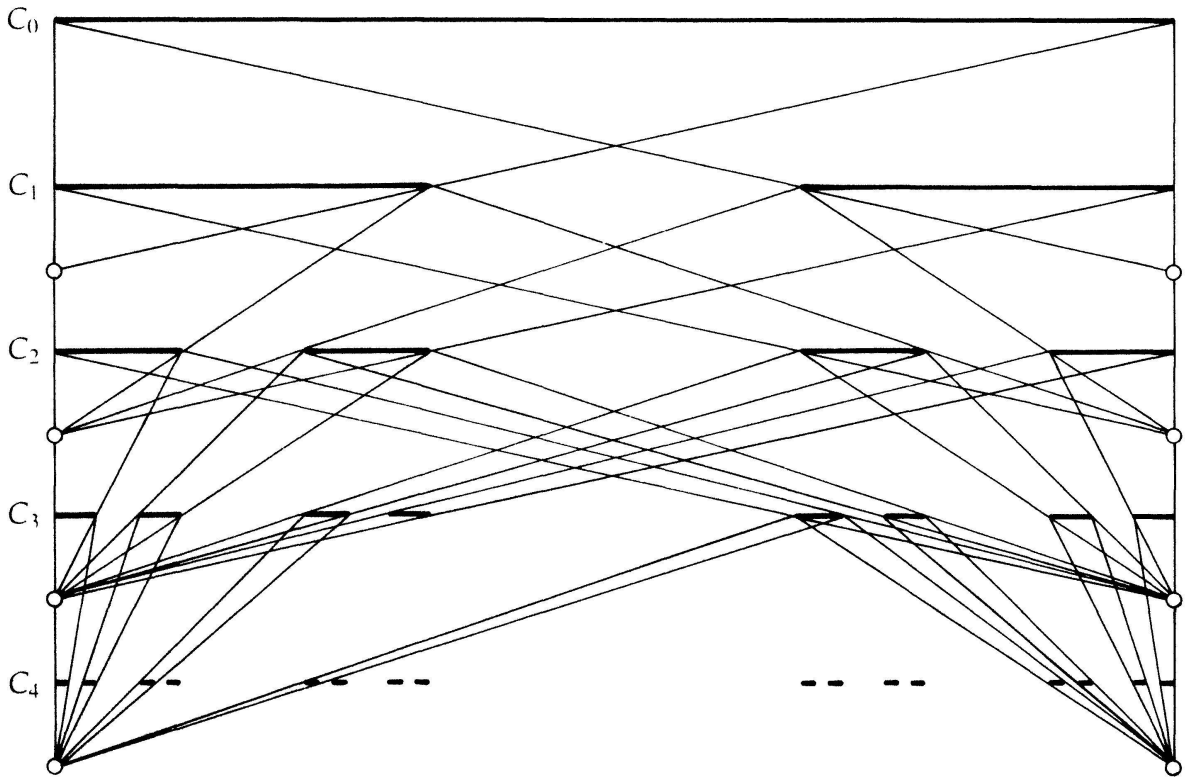

Fig. 1

Nun kann man aber zu der Cantor-Menge noch auf eine ganz andere Weise gelangen, und damit kommen wir einem verbreiteten Herstellungsprinzip für Fraktale auf die Spur: Betrachte die beiden Abbildungen

$$w_1: \quad t \mapsto \frac{t}{3}, \qquad w_2: \quad t \mapsto 1 + \frac{t-1}{3},$$

die die reelle Achse von 0 bzw. von 1 aus mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ strecken. Wird die Ausgangsmenge C_0 sowohl der einen wie der andern Abbildung unterworfen und werden die beiden Bildmengen *vereinigt*, so erhält man die aus zwei Intervallen bestehende Menge C_1. Wird C_1 seinerseits denselben zwei Abbildungen unterworfen, so erhält man durch Vereinigung der beiden Bilder die aus vier Intervallen bestehende Menge C_2, undsoweiter. Man erkennt (Figur 1), daß im Limes gerade die Cantor-Menge C entsteht. In gleicher Weise läßt sich mit zwei Ähnlichkeiten in der Ebene die *Kochsche Schneeflockenkurve* produzieren (Figur 2). Die Figur 3 zeigt ein Beispiel mit fünf Abbildungen, mit dem wir uns später noch genauer befassen werden.

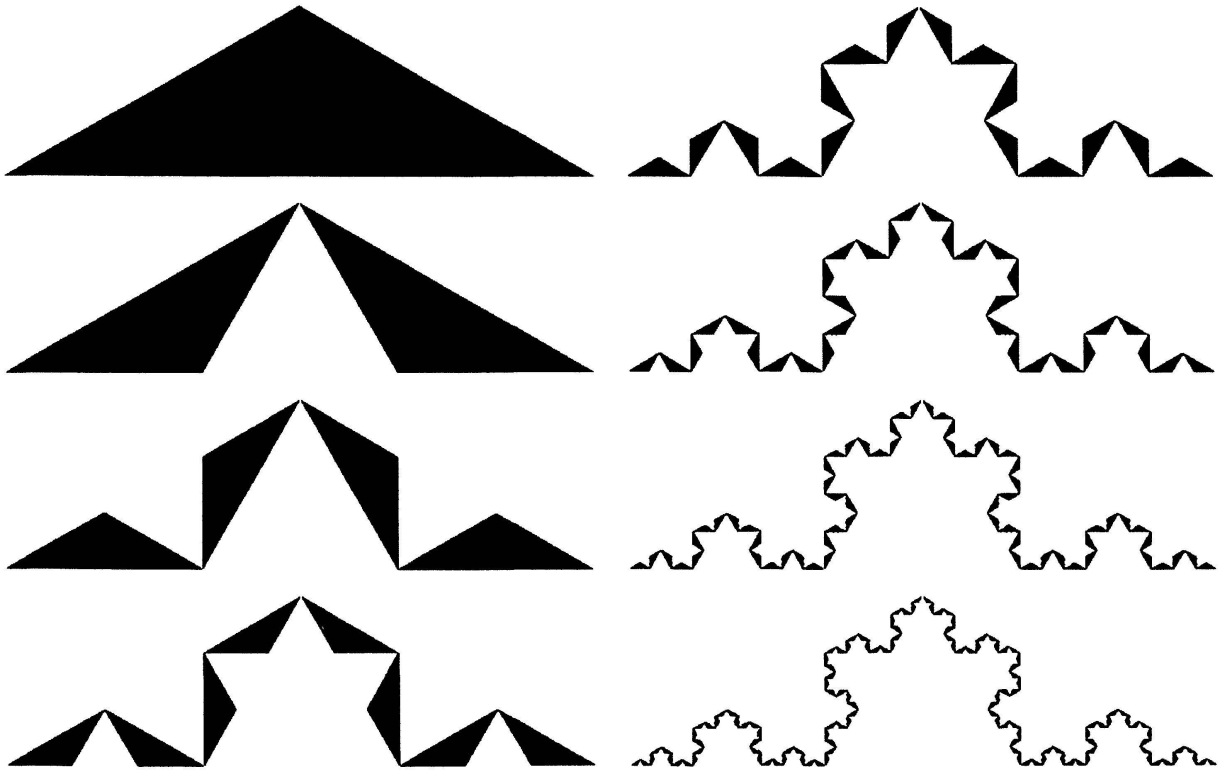

Fig. 2

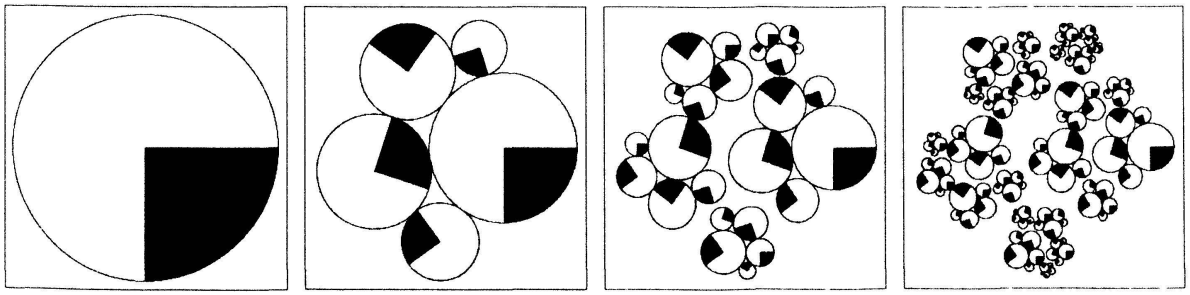

Fig. 3

Es wird höchste Zeit zu abstrahieren. Wir haben einen Grundraum X mit geometrischen Punkten, zum Beispiel die euklidische Ebene. X ist ein vollständiger metrischer Raum.

Eine *Figur* ist eine nichtleere kompakte Teilmenge $A \subset X$. Weiter ist eine Kollektion von Abbildungen

$$w_i : \quad X \to X \qquad (1 \le i \le r)$$

gegeben, das können zum Beispiel Ähnlichkeiten oder affine Abbildungen sein. Entscheidend ist, daß die w_i *kontrahieren*: Es gibt Zahlen $s_i \ge 0$ mit

$$|w_i(x) - w_i(y)| \le s_i \, |x - y| \qquad \forall x, y \in X \; ; \tag{1}$$

dabei ist $\max_i s_i =: s < 1$. Ist A eine Figur, so ist jede einzelne Bildmenge $w_i(A)$ eine zu A ähnliche oder affin-ähnliche Figur, je nach den besonderen Eigenschaften der w_i, und besitzt jedenfalls einen kleineren Durchmesser als A.

Der in den Beispielen erläuterte iterative Prozeß läuft auf das folgende hinaus: Beginnend mit einer Ausgangsfigur A_0 wird wiederholt die Operation

$$T : \quad A \mapsto T(A) := \bigcup_{i=1}^{r} w_i(A)$$

angewandt: $A_1 := T(A_0)$, $A_2 := T(A_1)$, allgemein:

$$A_{n+1} := T(A_n) \; . \tag{2}$$

Man erhält so eine Folge von Figuren, die hoffentlich gegen eine Grenzfigur K konvergiert.

Um von einer "Grenzfigur" sprechen zu können, benötigen wir einen Konvergenzbegriff auf der Menge $\mathcal{K}$ der Figuren. Hier kommt uns die sogenannte *Hausdorff-Metrik* zu Hilfe: Der *Hausdorff-Abstand* $\rho(A, B)$ von zwei Figuren A, $B \in \mathcal{K}$ ist definiert durch

$$\rho(A, B) := \min\{\epsilon \ge 0 \mid A \subset B_\epsilon \;\; \wedge \;\; B \subset A_\epsilon\} \; ;$$

dabei bezeichnet B_ϵ die "ϵ-Umgebung" von B; gemeint ist die Menge aller Punkte $x \in X$, die höchstens ϵ von einem Punkt von B entfernt sind (Figur 4). Diese Definition scheint vernünftig, trifft unsere Intuition aber nicht immer. So haben zum Beispiel die endliche Menge A und die Kreisscheibe B der Figur 5 einen kleinen Abstand.

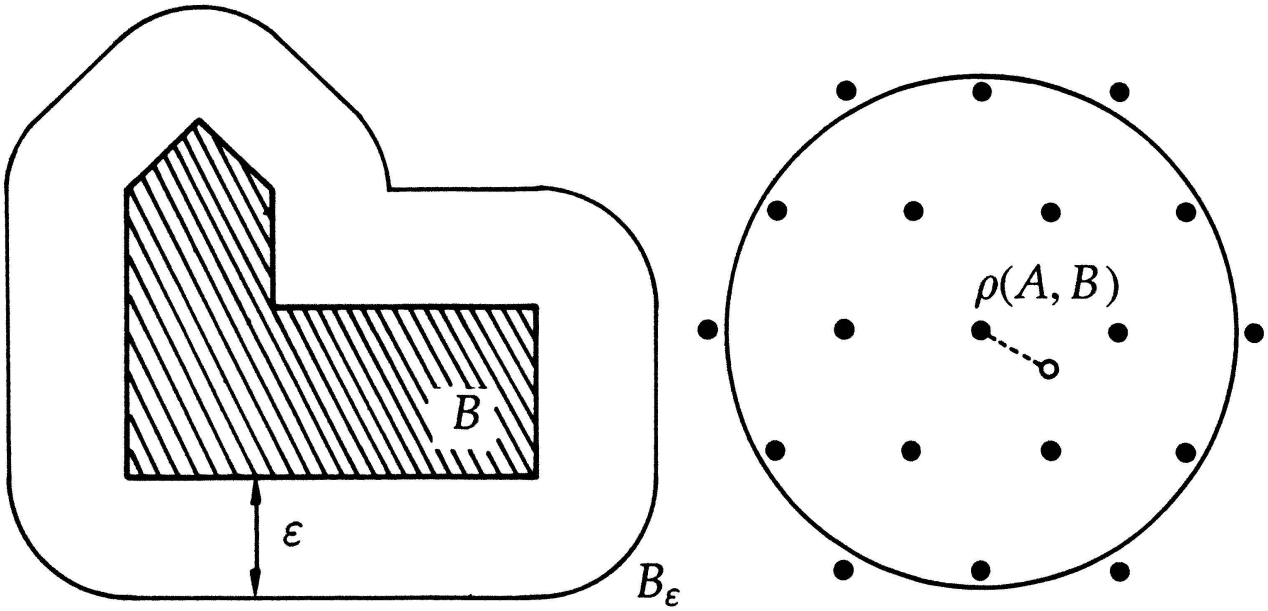

Fig. 4–5

Die Hausdorff-Metrik ρ macht $\mathcal{K}$ zu einem vollständigen metrischen Raum. Betrachten wir nun ein w_i, so ergibt sich aus (1) verhältnismäßig leicht, daß w_i auch die Abstände ganzer Figuren höchstens mit s_i multipliziert:

$$\rho\big(w_i(A), w_i(B)\big) \leq s_i\, \rho(A,B)\,,$$

und in der Folge gilt

$$\rho\big(T(A), T(B)\big) \leq s\, \rho(A,B) \qquad \forall A, B \in \mathcal{K}$$

(Figur 6). In anderen Worten: Die Transformation

$$T: \quad \mathcal{K} \to \mathcal{K}\,, \qquad A \mapsto T(A) := \bigcup_{i=1}^{r} w_i(A)$$

des Figurenraums ist kontrahierend. In dieser Situation können wir den *allgemeinen Fixpunktsatz* anwenden. Er besagt:

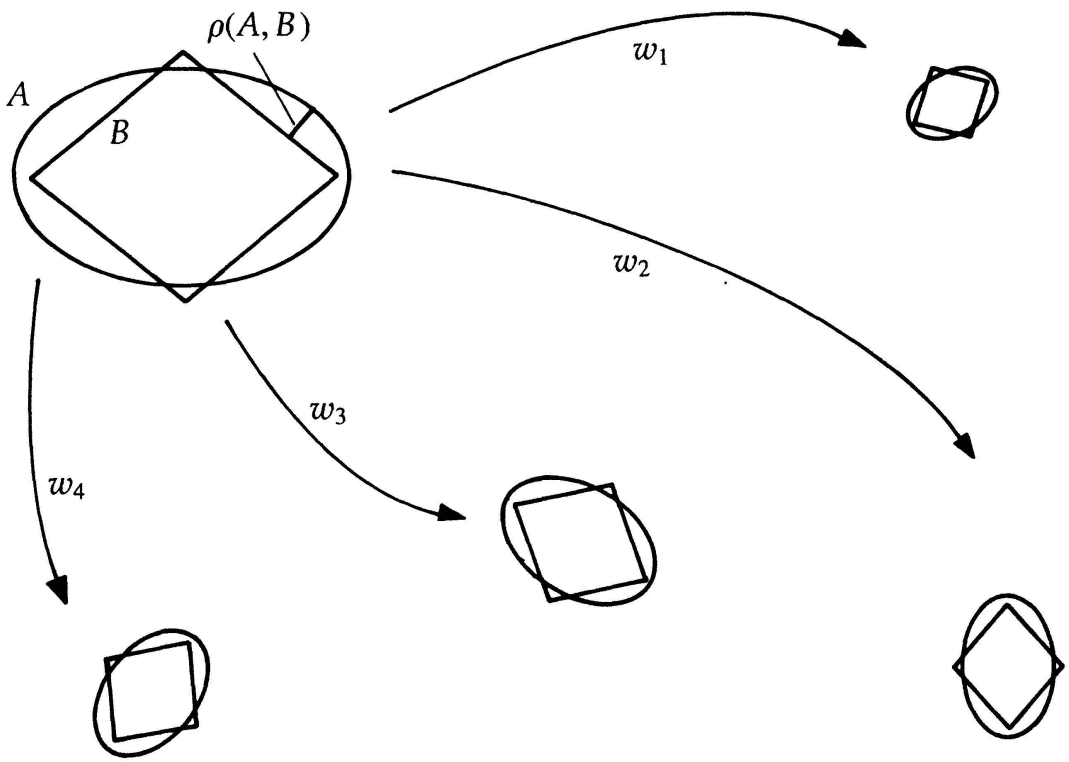

Fig. 6

(I) Es gibt genau eine Figur $K \in \mathcal{K}$ mit $T(K) = K$.

(II) Bildet man für ein beliebiges $A_0 \in \mathcal{K}$ nach der Iterationsvorschrift (2) die Folge $(A_n)_{n\geq 0}$, so gilt $\lim_{n\to\infty} A_n = K$ in $\mathcal{K}$.

Unser Konstruktionsprozeß konvergiert somit jedenfalls gegen ein gewisses $K \in \mathcal{K}$. Dieses K ist der *Attraktor* der Transformation $T : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ und stellt sich in vielen

Fällen als ein Fraktal heraus. Hierzu ist es natürlich notwendig, die w_i geeignet zu wählen.

In einem bekannten Beispiel von Barnsley sind vier affine Abbildungen

$$w_i : \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix} \tag{3}$$

mit den folgenden Daten gegeben (die letzte Kolonne wird später erklärt):

i	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i	f_i	p_i
1	0.85	0.04	−0.04	0.85	0	1.60	0.85
2	0.20	−0.26	0.23	0.22	0	1.60	0.07
3	−0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07
4	0	0	0	0.16	0	0	0.01

Eine derartige Tabelle codiert die (unter Umständen sehr komplexe) Limesmenge K durch einige wenige Zahlen und wird nach Barnsley als *IFS-Code* für K bezeichnet (IFS für *iterated function system*). Figur 7 zeigt den Film der ersten zwölf Entwicklungsstufen, ausgehend von einem willkürlich gewählten Quadrat A_0.

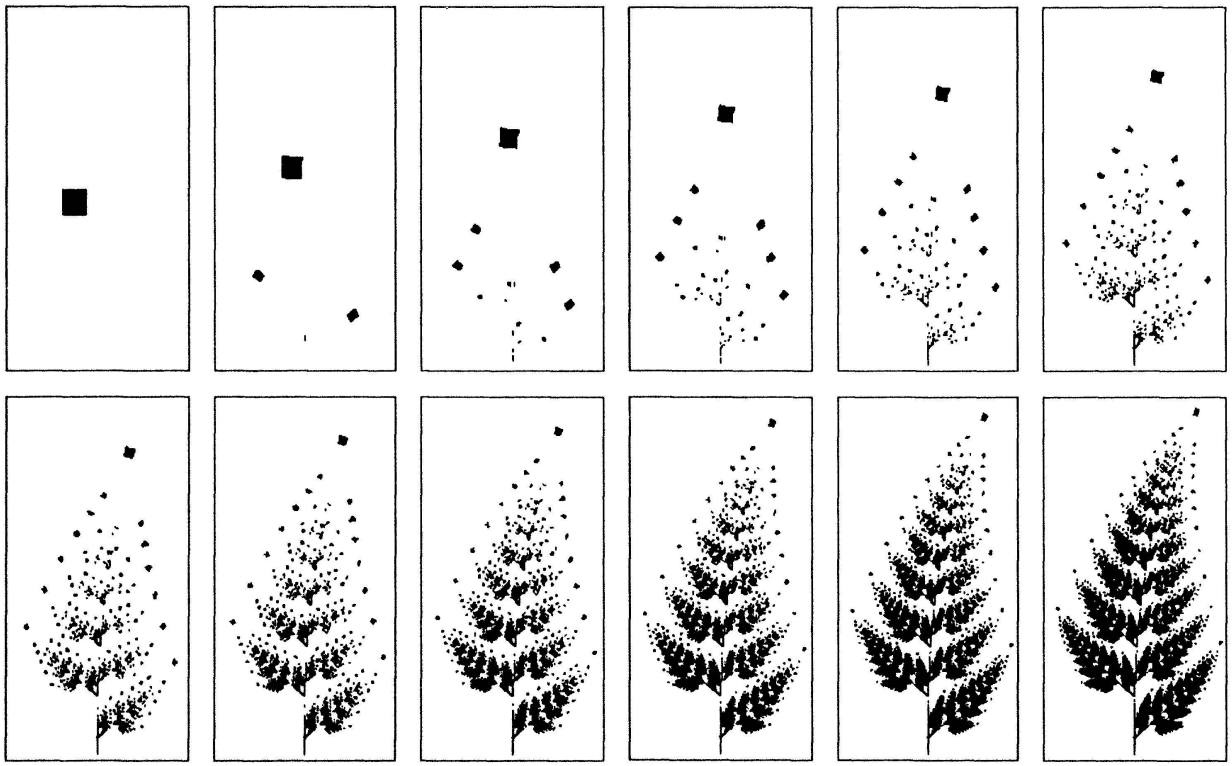

Fig. 7

Die Implementation eines IFS auf dem Computer ist an sich nicht sehr aufwendig. Zur Konstruktion von A_{n+1} aus A_n muss aber jedes einzelne Pixel von X abgefragt werden,

was unter Umständen zeitraubend ist. Wir wünschen uns daher ein Verfahren, das von Anfang an nur Punkte von K generiert. Die folgende Idee ist ziemlich naheliegend: Ergänze das gegebene IFS durch passend gewählte Wahrscheinlichkeiten

$$p_i > 0 \quad (1 \le i \le r), \qquad \sum_{i=1}^{r} p_i = 1,$$

zu einem *IFS mit Wahrscheinlichkeiten*:

$$(X;\ w_1, \ldots, w_r;\ p_1, \ldots, p_r)\ .$$

Sind die w_i zum Beispiel affine Abbildungen (3), so wird man die p_i proportional zu den Größen $|a_i d_i - b_i c_i| + 0.01$ wählen. Für einen beliebigen Anfangspunkt $x_0 \in X$ wird nun rekursiv eine Folge $(x_n)_{n\ge 0}$ konstruiert (und gezeichnet), wobei jeder Rekursionsschritt aus zwei Instruktionen besteht:

(1) Wähle zufällig ein $i \in [1\,.\,.\,r]$ gemäß den gegebenen Wahrscheinlichkeiten.

(2) Setze $x_{n+1} := w_i(x_n)$.

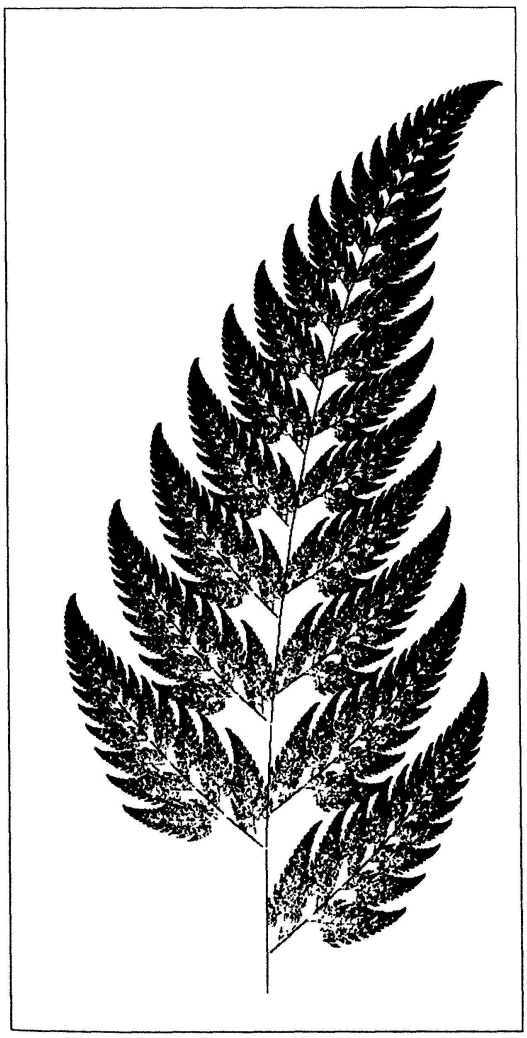

Fig. 8

Über die so entstehende Zufallsfolge $(x_n)_{n\ge 0}$ läßt sich der folgende Satz 1 beweisen. Dabei bezeichnen wir mit $d(y, K) := \min_{x\in K} |y - x|$ den Abstand des Punktes y von der Menge K und mit $\operatorname{diam}(A) := \sup\{\, |x - y| \mid x, y \in A \,\}$ den Durchmesser einer Menge A.

Satz 1.

(a) *Es gilt* $d(x_n, K) \le s^n\, d(x_0, K)$.

(b) *Jeder Punkt* $\xi \in K$ *ist mit Wahrscheinlichkeit 1 ein Häufungspunkt der Folge* $(x_n)_{n\ge 0}$.

In Figur 8 haben wir den Farnzweig von Barnsley mit Hilfe dieses Verfahrens gezeichnet; mit Rücksicht auf (a) wurden die ersten 100 Punkte unterdrückt.

Wir geben noch die Beweisidee für (b), siehe die Figur 9: Es sei $d(x_0, K) = \delta$. Setze $A_0 := K_\delta$ und betrachte neben der Folge $(x_n)_{n\ge 0}$ noch die Figurenfolge (2). Dann gilt

$$x_n \in A_n \subset A_0 \qquad \forall n \ge 0\ . \tag{4}$$

Zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ gibt es ein N mit

$$s^N \operatorname{diam}(A_0) < \epsilon\ . \tag{5}$$

Nun ist

$$\xi \in K = T^N(K) \subset T^N(A_0) = \bigcup_{\mathbf{i}} w_{\mathbf{i}}(A_0),$$

wobei wir zur Abkürzung

$$w_{i_N} \circ \ldots \circ w_{i_2} \circ w_{i_1} =: w_{\mathbf{i}}$$

gesetzt haben. Es gibt daher ein Wort $\mathbf{i}^* = (i_1^*, \ldots, i_N^*)$ mit $\xi \in w_{\mathbf{i}^*}(A_0)$. Hieraus folgt wegen (4) und (5): Für alle $n \geq 0$ gilt

$$\left| w_{\mathbf{i}^*}(x_n) - \xi \right| < \epsilon .$$

Wenn also in der ausgewürfelten Folge

$$i_1, i_2, i_3, i_4, \ldots, i_n, \ldots$$

einmal das Wort $\mathbf{i}^*$ erscheint, das heißt: Wenn für ein gewisses $n \geq 0$ gilt

$$i_{n+k} = i_k^* \qquad (1 \leq k \leq N),$$

dann ist $|x_{n+N} - \xi| < \epsilon$. Die Wahrscheinlichkeit, daß das nie passiert, ist 0.

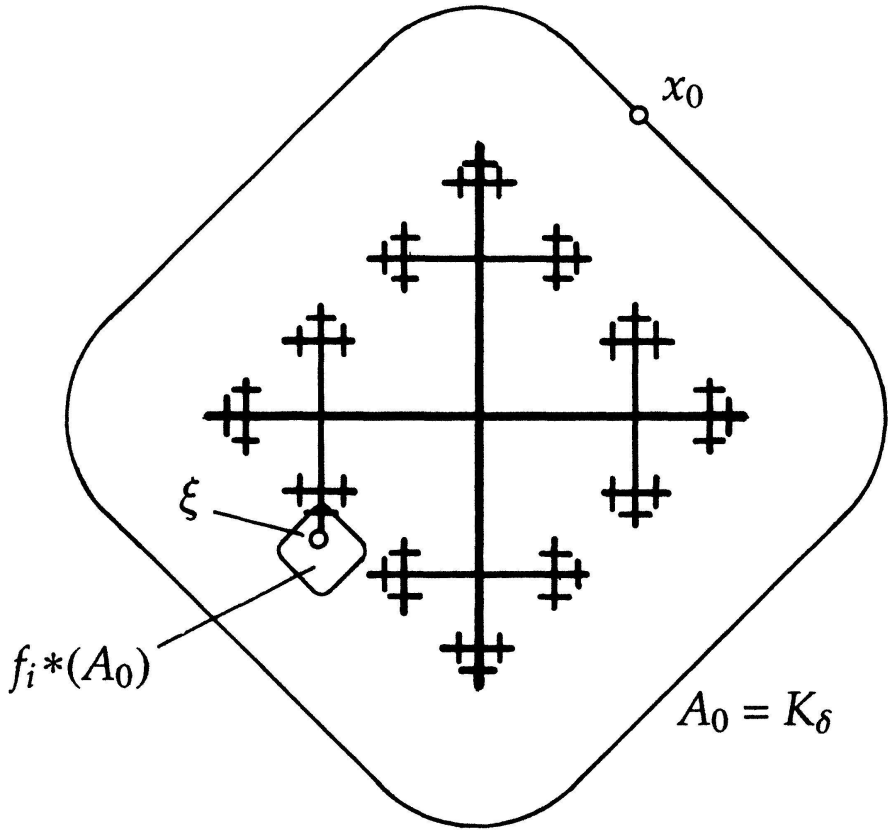

Fig. 9

Soviel zur Herstellung von Fraktalen. Nun zur Hausdorff-Dimension. Zunächst benötigen wir eine "q-dimensionale Volumenmessung", $q \geq 0$ ein *reeller* Parameter. Das ist eine Mengenfunktion

$$\mu_q : \quad \mathcal{K} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad A \mapsto \mu_q(A)$$

(in Wirklichkeit ist $\mu_q(A)$ für viel allgemeinere Mengen A definiert) mit folgenden Eigenschaften (siehe die Figur 10):

- $\mu_q(A \cup B) \leq \mu_q(A) + \mu_q(B)$.
- Sind die Mengen A_k $(k \in \mathbb{N})$ paarweise disjunkt, so gilt

$$\mu_q\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k \mu_q(A_k) .$$

- $\mu_q(A + c) = \mu_q(A)$, $\quad \mu_q(A^S) = \mu_q(A)$.
- $\mu_q(\lambda A) = \lambda^q \, \mu_q(A)$.

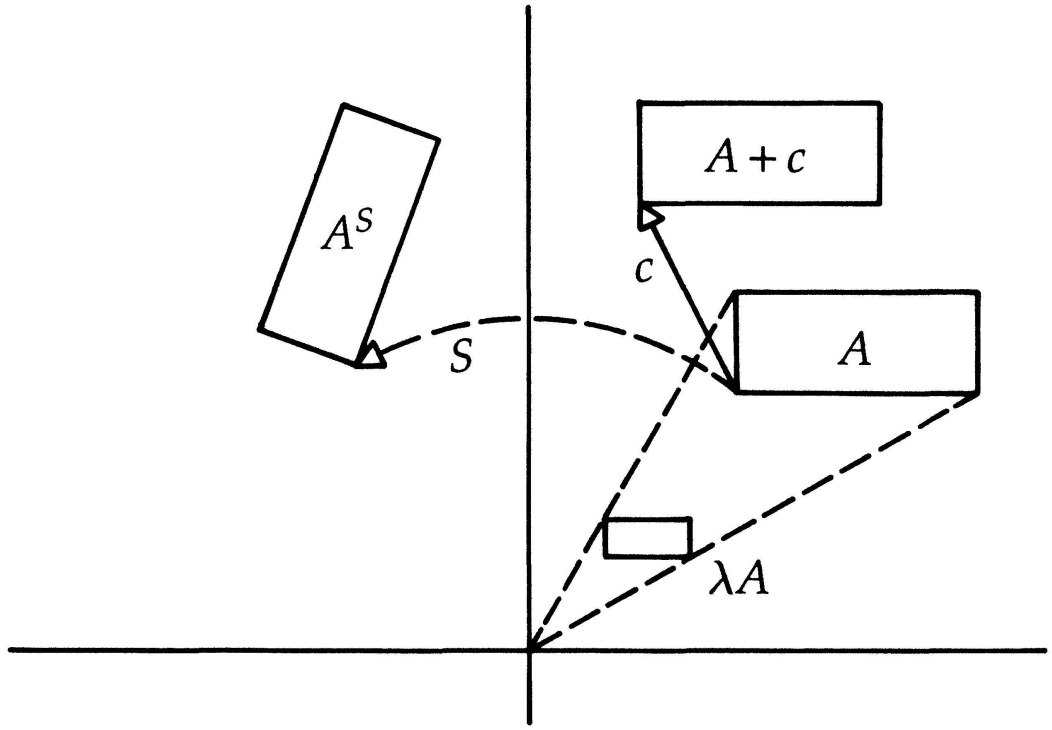

Fig. 10

Von diesen Eigenschaften ist die letzte die in dem vorliegenden Zusammenhang entscheidende: Sie drückt aus, daß sich μ_q bei linearer Streckung so verhält, wie man das von einem q-dimensionalen Volumen erwartet. Wenn alles seine Richtigkeit hat, sollte folgendes gelten (Figur 11):

$$\mu_0(\{a,b,c\}) = 3 , \qquad \mu_1(\{a,b,c\}) = 0 ,$$
$$\mu_0(\gamma) = \infty , \qquad \mu_1(\gamma) = \text{Länge}(\gamma) , \qquad \mu_{1.5}(\gamma) = 0 ,$$
$$\mu_1(S) = \infty , \qquad \mu_{1.7}(S) = \infty , \qquad \mu_2(S) = \text{Flächeninhalt}(S) \qquad \mu_{2.4}(S) = 0 .$$

Für eine derartige Volumenmessung hat Hausdorff 1919 den folgenden Ansatz vorgeschlagen: Überdecke die zu messende Menge A mit kleinen Kugeln B_k vom Durchmesser $|B_k| \leq \delta$. Die Größe $|B_k|^q$ kann als q-dimensionales "Rohvolumen" von B_k betrachtet

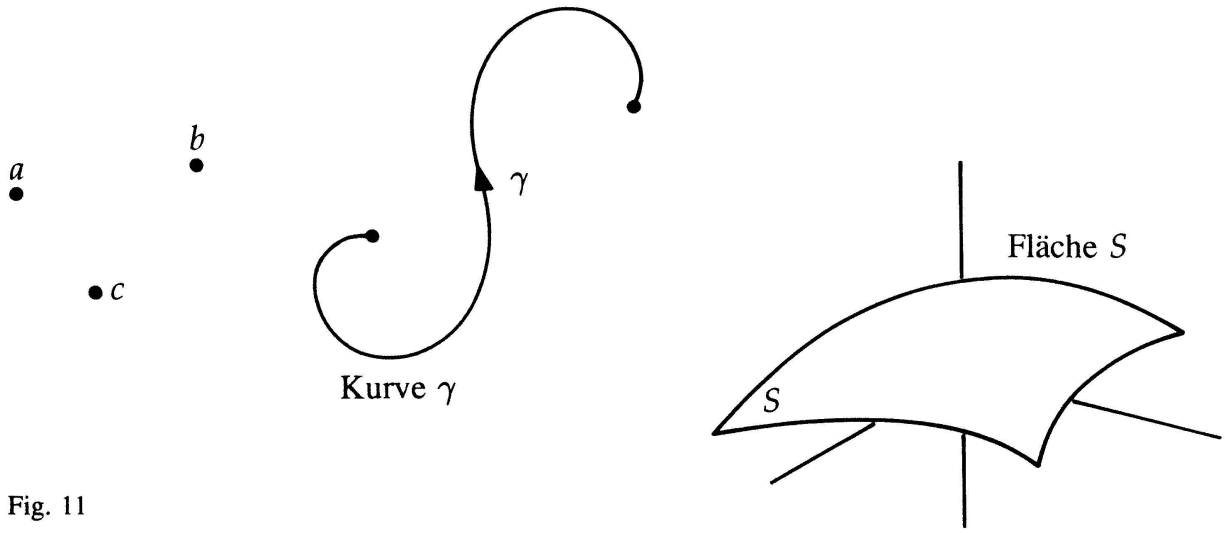

Fig. 11

werden (auf einen konstanten Faktor kommt es im weiteren nicht an). Addiert man die Rohvolumina der zu derartigen Überdeckungen von A verwendeten B_k, so gelangt man nach zwei Grenzübergängen (Infimum über alle Überdeckungen und $\delta \to 0$) zum *q-dimensionalen Hausdorff-Maß*

$$\mu_q(A) := \lim_{\delta \to 0} \inf\left\{ \sum_k |B_k|^q \;\middle|\; A \subset \bigcup_k B_k\,,\ \ |B_k| \le \delta \right\}.$$

Das ist an sich ganz vernünftig, in Wirklichkeit aber sehr subtil. Es kostet ein schönes Stück "Maßarbeit", zu beweisen, daß dieses μ_q die gewünschten Eigenschaften besitzt.

Um nun zur Hausdorff-Dimension zu kommen, müssen wir mit dem Parameter q spielen. Wir betrachten eine *feste* Figur $A \in \mathcal{K}$ und tragen $\mu_q(A)$ als Funktion von q auf (Figur 12). Dabei zeigt sich folgendes (vgl. auch die obigen Beispiele): Es gibt eine Sprungstelle q_*, wo $\mu_q(A)$ vom Wert ∞ auf 0 hinunter fällt. Dieses $q_* =: \dim_H(A)$ ist definitionsgemäss die *Hausdorff-Dimension* von A. In vielen Fällen hat $\mu_{q_*}(A)$ einen von 0 und ∞ verschiedenen Wert, der dann als geometrisch sinnvoller "Inhalt" von A angesehen werden kann.

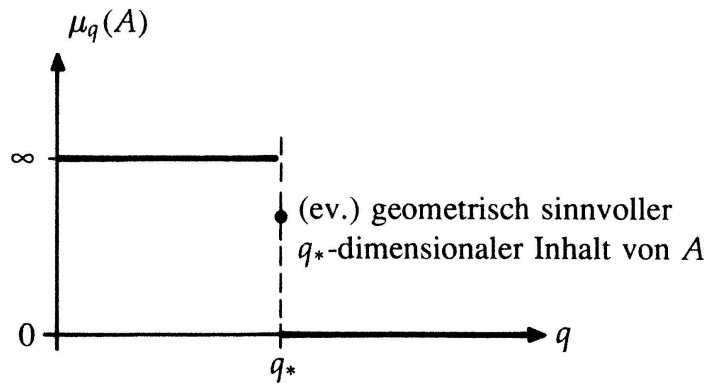

Fig. 12

Damit stellt sich das Problem, für eine konkret gegebene Menge $K \in \mathcal{K}$ die Hausdorff-Dimension tatsächlich zu berechnen. Glücklicherweise ist das in vielen Fällen for-

melmäßig leicht zu bewerkstelligen. Wir erläutern die Grundidee zunächst an der Cantor-Menge C. Es ist

$$C = T(C) = \bigcup_{i=1}^{2} w_i(C);$$

dabei sind die Mengen $w_i(C)$ disjunkt, und die w_i sind Streckungen mit dem Streckungsfaktor $\frac{1}{3}$. Damit gilt für beliebiges $q \geq 0$:

$$\mu_q(C) = \mu_q\left(\tfrac{1}{3}C\right) + \mu_q\left(\tfrac{1}{3}C\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^q \mu_q(C).$$

Diese Gleichung läßt nur dann einen Wert $\mu_q(C) \neq 0, \neq \infty$ zu, wenn

$$2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^q = 1 \qquad \text{d.h.} \qquad q = \frac{\log 2}{\log 3}$$

ist. Dies bringt uns auf die Vermutung

$$\dim_H(C) = \frac{\log 2}{\log 3},$$

und das ist auch der richtige Wert. Die eben angestellten Überlegungen liefern auch in allgemeineren Fällen den richtigen Dimensionswert. Es gilt der folgende Satz:

Satz 2. (Hutchinson 1981)

Es sei $(X; w_1, \ldots, w_r)$ ein IFS, und zwar seien die w_i Ähnlichkeiten mit Streckungsfaktoren $s_i < 1$, die gemeinsam noch die folgende Bedingung betreffend "Nicht-Überlappen" erfüllen: Es gibt eine offene Menge Ω mit $T(\Omega) \subset \Omega$ und

$$w_i(\Omega) \cap w_j(\Omega) = \emptyset \qquad (i \neq j).$$

Es sei K der Attraktor dieses IFS, und die Zahl D sei so bestimmt, daß

$$s_1^D + s_2^D + \ldots + s_r^D = 1 \tag{6}$$

ist. Dann gilt

$$\dim_H(K) = D.$$

Die Gleichung (6) lässt sich heuristisch folgendermaßen begründen: Es ist

$$K = T(K) = \bigcup_{i=1}^{r} w_i(K);$$

dabei sind die einzelnen Bilder $w_i(K)$ wegen $K \subset \bar{\Omega}$ für alle praktischen Zwecke disjunkt. In anderen Worten: Die Menge K ist Vereinigung von r nicht überlappenden

verkleinerten Kopien von sich selbst. (Mengen mit dieser Eigenschaft werden *selbstähnlich* genannt.) Folglich gilt für jedes $q \geq 0$:

$$\mu_q(K) = \sum_{i=1}^{r} \mu_q\big(w_i(K)\big) = \sum_{i=1}^{r} s_i^q \, \mu_q(K) = \Big(\sum_{i=1}^{r} s_i^q\Big) \, \mu_q(K) \,,$$

und dies ist nur dann mit $\mu_q(K) \neq 0, \neq \infty$ erfüllbar, wenn $s_1^q + \ldots + s_r^q = 1$ ist.

Zum Schluß behandeln wir noch eine Methode, die fraktale Dimension (auch von Fraktalen in der Natur) experimentell zu bestimmen: das sogenannte *Box-Counting*. Wir teilen den Grundraum $X = \mathbb{R}^m$ in Würfel W_j der Seitenlänge h ein. Es sei

$$N_h(A) := \#\{j \mid W_j \cap A \neq \emptyset\}$$

die Anzahl der Würfel, die die betrachtete Menge $A \in \mathcal{K}$ treffen. Das Wachstumsverhalten von $N_h(A)$ für $h \to 0$ gibt Auskunft über die Dimensionalität von A. Man nennt

$$\dim_\square(A) := \lim_{h \to 0} \frac{\log N_h(A)}{\log(1/h)} \tag{7}$$

die *Box-Counting-Dimension* von A. Es ist immer $\dim_H(A) \leq \dim_\square(A)$, und in der von Hutchinson betrachteten Situation gilt sogar das Gleichheitszeichen. Die Formel (7) läßt sich wie folgt begründen: Grosso modo gilt für alle $h \ll 1$:

$$\frac{1}{C} \mu_q(A) \leq N_h \cdot h^q \leq C \, \mu_q(A) \,,$$

denn die Würfel W_j, die A schneiden, bilden zusammen eine Überdeckung von A. Ist $\mu_q(A) \neq 0, \neq \infty$, so gibt es folglich eine Konstante C' mit

$$-C' \leq \log N_h + q \log h \leq C' \qquad (h \to 0) \,,$$

und das ist nur möglich, wenn q den angegeben Wert hat.

Mit Hilfe einer kleinen Grenzwertüberlegung läßt sich aus (7) die folgende Faustregel gewinnen: Es ist

$$\dim_\square(A) = \lim_{h \to 0} \frac{\log(N_h / N_{2h})}{\log 2} \,,$$

falls der angeschriebene Grenzwert existiert. Wir betrachten zum Schluß nocheinmal das in Figur 3 gezeigte IFS mit fünf Ähnlichkeiten. Die in Figur 13 angegebenen Streckungsfaktoren sind so gewählt, daß die fünf Bilder $w_i(\Omega)$ des großen Kreises Ω nebeneinander in Ω Platz haben. Die Bedingung betreffend "Nicht-Überlappen" ist damit erfüllt. Die nach Hutchinson berechnete Hausdorff-Dimension des Attraktors hat in diesem Fall den Wert $D = 1.683$. Wir haben nun den Zufalls-Algorithmus für verschiedene Werte von h jeweils solange laufen lassen, bis 10 000mal hintereinander kein neues $(h \times h)$-Pixel geschwärzt wurde. Es ergab sich das folgende Resultat:

h	# Iterationen	N_h	$\log(N_h/N_{2h})\ /\ \log 2$
1/2	44481	465	
1/4	156430	1489	1.679
1/8	200330	4756	1.675
1/16	500335	15171	1.673
1/32	1959049	48904	1.689

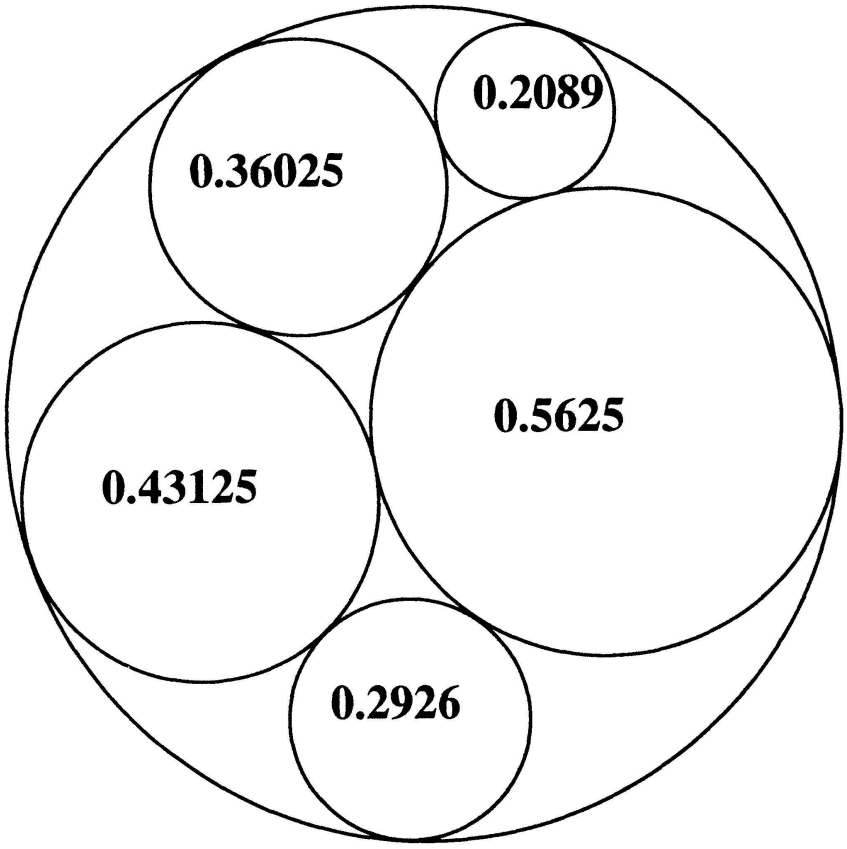

Fig. 13

Literatur

F. Hausdorff: *Dimension und äußeres Maß*. Math. Annalen **79** (1919), 157–179.

J. E. Hutchinson: *Fractals and selfsimilarity*. Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), 713–747.

B. B. Mandelbrot: *The fractal geometry of nature*. New York (Freeman) 1982.

K. J. Falconer: *Fractal Geometry — Mathematical foundations and applications*. Chichester (Wiley) 1990.

M. Barnsley: *Fractals everywhere*. Boston (Academic Press) 1988.

H.-O. Peitgen & P. H. Richter: *The beauty of fractals*. Berlin (Springer) 1986.

Prof. Christian Blatter
Dept. Mathematik
ETH-Zentrum
CH-8092 Zürich