

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 47 (1992)

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Aufgaben

Liebe Leserin, lieber Leser

Wir freuen uns, Sie an dieser Stelle im Heft regelmässig mit kleinen Problemen aus dem grossen Gebiet der Mathematik bekannt machen zu dürfen. Wir haben die Redaktion der Aufgabensparte von Professor Dr. Hans Kappus übernommen und möchten ihm ganz herzlich für seine grosse und begeisterte Arbeit danken, die er während 17 Jahren für die "Elemente" und speziell für den Kreis der Aufgabenlöser geleistet hat.

Es ist eine doch recht eigentümliche Eigenschaft, die uns Mathematiker von anderen Berufsleuten unterscheidet: Wir stellen uns gegenseitig Aufgaben, deren Lösung wir in der Regel bereits kennen. Warum tun wir das? — Es ist sicher nicht das Resultat der Aufgabe, das im Zentrum des Interesses steht. Vielleicht ist es die Neugier zu erfahren, wie ein anderer Mensch sich das Problem zurechtlegt, mit dem man selbst einige Zeit gerungen hat. Oder ist es vielleicht sogar eine Art freundschaftliches Kräfteressen? Auf jeden Fall scheint es auch um einen "mathematiksozialen" Kontakt zu gehen, um den Austausch von unterschiedlichen Erfahrungen, die wir im Land der Mathematik machen. So soll denn die Aufgabensparte der "Elemente" zu einem Forum werden, auf dem in einer für uns allgemeinverständlichen Sprache Miniaturen aus verschiedenen Gebieten unseres Fachs verhandelt werden. Damit eine anregende Breite der Themen gewahrt werden kann, sind wir darauf angewiesen, dass die schöne Tradition des gegenseitigen Aufgabenstellens weitergeführt wird. Bitte schicken Sie, liebe Leserin, lieber Leser, Ihre Vorschläge (mit Lösungen und allfälligen Illustrationen) an eine von unseren Adressen.

Natürlich werden auch wir auf die Suche nach geeigneten Problemen gehen. Selbst in unserem engeren Tätigkeitsfeld der Schulmathematik taucht dann und wann eine Fragestellung auf, die eine tiefere Analyse verdient. Wir nehmen uns vor, Aufgaben auszuwählen, die von der Fragestellung her reizvoll und nachfühlbar sind. Als Leser und Löser haben wir nämlich die Erfahrung gemacht, dass ein aus einem grösseren Problemzusammenhang herausgelöster Aufgabenschritt zwar technisch interessant sein mag, aber für denjenigen, der den Zusammenhang nicht kennt, kaum motivierend wirkt. Wir werden uns ausserdem bemühen, regelmässig eine Aufgabe vorzustellen, die einem nicht alltäglichen Blick in den Alltag entstammt. Das können "offene" Aufgaben sein, bei denen es zunächst gilt, eine adäquate mathematische Formulierung zu finden, oder bei denen schon vom Ansatz her verschiedene Fassungen und Behandlungsmethoden möglich sind.

Die Lösungen sollten wenn immer möglich mit elementaren Mitteln auffindbar sein; ja wir denken auch an Beweismethoden, die mit einer günstigen Figur den fraglichen

Zusammenhang in die Augen springen lassen. "Einsicht" — im wörtlichen Sinne — ist bei solch visuellen Beweisen wichtiger als formale und technische Virtuosität. So hat sich bereits Arthur Schopenhauer geäußert, als er sich radikal gegen die logisch einwandfreien, aber unanschaulichen "Mausefallenbeweise" der Mathematik wandte: "Wir verlangen die Zurückführung jeder logischen Begründung auf eine anschauliche."

P. Gallin, H. Walser

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. August 1992 an:

– Dr. P. Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma

oder

– Dr. H. Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

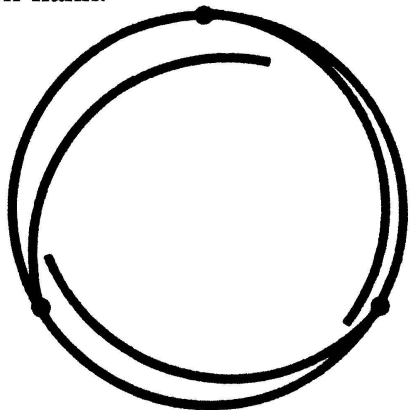
Aufgabe 1060: Wie langsam kann eine Drehtüre passiert werden?

Im Grundriss bestehe der Rahmen der Türe aus zwei Viertelsbogen eines Kreises, symmetrisch zum Zentrum gelegen; die Türe bestehe aus zwei zueinander senkrechten Durchmessern des Kreises; die Trennwand zwischen Innen- und Aussenraum sei eine einfache Kurve, welche die Mitten der beiden Bogen ausserhalb des Kreises verbindet.

Bewegt sich ein Peripheriepunkt der Türe mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 , so kann die Türe von einem bewegten Punkt mit der Geschwindigkeit $0.5v_0$ passiert werden. Bei einer Geschwindigkeitsbegrenzung von $0.1v_0$ ist hingegen ein Passieren unmöglich. Es gibt somit einen kritischen Faktor k : Bei Begrenzungen grösser als $k \cdot v_0$ ist das Passieren möglich, bei Begrenzungen kleiner als $k \cdot v_0$ unmöglich. Wie gross ist k ?

E. Specker, Zürich, CH

Aufgabe 1061: Mineralwasserflaschen weisen heute oft versiegelte Drehverschlüsse auf. Das Siegel besteht aus einem Plastikring, der im Deckel sitzt und von dem ein Teil sich am Flaschenhals festkrallt. Öffnet man die Flasche, platzt dieser Teil normalerweise in drei Bogenstücke und gibt den Deckel frei. Die drei Bogenstücke hängen in der Regel mit ihren Enden an einem unbeschädigten Ring, der leicht aus dem Deckel entfernt werden kann.



Als ich mit so einem herausoperierten Plastikgebilde achtlos spielte, bemerkte ich plötzlich, dass die drei drehsymmetrisch angeordneten Teile sich simultan um ihre fixen Enden in das Innere des Rings hineindreuen lassen, bis sie sich gegenseitig den Weg verstellen. Wie weit können sie verdreht werden?

Geplatztes Siegel mit unbeschädigtem Ring und drei je um ihre Enden drehbaren Bogenstücken

P. Gallin, Bauma, CH

Lösungen

Aufgabe 1043. Es bezeichne u_n bzw. U_n den Umfang eines dem Kreis mit Radius r und Umfang U ein- bzw. umbeschriebenen regulären n -Ecks ($n \geq 3$). Mit beliebigen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sei ferner

$$T_n = \alpha u_n + \beta U_n.$$

Man zeige:

1. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(U_n - U) = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(U - u_n) = \frac{2}{3} \pi^3 r.$$

2. Unter allen Folgen (T_n) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = U$ hat jene mit

$$t_n = \frac{2}{3} u_n + \frac{1}{3} U_n$$

die grösste Konvergenzordnung, und zwar gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^4(T_n - U) = \frac{1}{10} \pi^5 r.$$

W. Moldenhauer, Erfurt, D

Lösung: Wegen $u_n = 2rn \sin \frac{\pi}{n}$, $U_n = 2rn \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$, $U = 2\pi r$ und der für $x \rightarrow 0$ gültigen Entwicklungen

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^7), \quad \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7)$$

folgt für $n \rightarrow \infty$

$$n^2(U_n - U) = 2rn^2 \left(n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} - \pi \right) = 2rn^2 \left(\frac{\pi^3}{3} n^{-2} + O(n^{-4}) \right) = \frac{2}{3} \pi^3 r + O(n^{-2}),$$

$$n^2(U - u_n) = 2rn^2 \left(\pi - n \sin \frac{\pi}{n} \right) = 2rn^2 \left(\frac{\pi^3}{6} n^{-2} + O(n^{-4}) \right) = \frac{1}{3} \pi^3 r + O(n^{-2}).$$

Hieraus ergeben sich die Behauptungen unter 1. Die Formel

$$\begin{aligned} T_n &= \alpha u_n + \beta U_n = 2rn \left(\alpha \sin \frac{\pi}{n} + \beta \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right) \\ &= 2rn \left((\alpha + \beta) \frac{\pi}{n} + \frac{2\beta - \alpha}{6} \frac{\pi^3}{n^3} + \frac{\alpha + 16\beta}{120} \frac{\pi^5}{n^5} + O(n^{-7}) \right) \end{aligned}$$

zeigt, daß $T_n \rightarrow U$ genau dann gilt, wenn $\alpha + \beta = 1$ ist; weiter ist die Konvergenzgeschwindigkeit genau dann am grössten, wenn $\alpha = 2\beta$ ist, also $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$. Für diese Werte ist $\frac{\alpha + 16\beta}{120} = \frac{1}{20}$, also $n^4(T_n - U) = \frac{1}{10} \pi^5 r + O(n^{-2})$, womit dann auch sämtliche Behauptungen unter 2. bewiesen sind.

P. Bundschuh, Köln, D

Weitere Lösungen sandten A.A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hong Kong), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), A. Müller (Zürich), H.-J. Seiffert (Berlin, D), M. Vowe (Therwil), B.M.M. de Weger (Enschede, NL).

Aufgabe 1044. Die n Karten eines Stapels S_0 seien von oben nach unten von 1 bis n nummeriert. Wir bilden zwei neue Stapel L_1 und R_1 , indem wir aus S_0 von oben beginnend abwechselnd eine Karte nach links und $s-1 \geq 1$ Karten nach rechts legen, bis S_0 abgebaut ist. Wir legen R_1 weg und verfahren mit $S_1 = L_1$ wie mit S_0 . Der Abbau wird solange wiederholt, bis $S_t = L_t$ genau eine Karte enthält; ihre Nummer sei $f(n)$.

Für welche Werte von n wird $f(n) = 1$?

J. Binz, Bolligen

Lösung: Die Karte Nummer 1 liegt, wenn sie alle Abbauschritte überlebt, bei den Stapeln S_0, S_2, S_4, \dots an oberster Stelle, bei S_1, S_3, S_5, \dots an unterster Stelle. Wir überlegen, wie sich bei sukzessivem Abbau die Höhen $n-1 = n_0, n_1, n_2, \dots$ der Stapel \widetilde{S}_k verändern, die aus S_k durch Entfernen der Karte mit der Nummer 1 entstehen. Der Stapel \widetilde{S}_{2k+1} entsteht aus \widetilde{S}_{2k} , indem man alle Karten mit einer durch s teilbaren Platznummer übernimmt; dies sind

$$n_{2k+1} = [n_{2k}/s]$$

Stück. Die Zahl n_{2k+1} muss eine durch s teilbare Zahl sein, damit beim nächsten Abbauschritt die unter S_{2k+1} liegende Karte mit der Nummer 1 überlebt. Für die Höhe von \widetilde{S}_{2k+2} gilt dann

$$n_{2k+2} = n_{2k+1}/s.$$

Denkt man sich die n_i im Positionssystem zur Basis s dargestellt, so bedeuten obige Formeln gerade, dass man bei der Darstellung von n_i das hinterste Zeichen streichen muss, um zur Darstellung von n_{i+1} zu gelangen. Die Bedingung dafür, dass n_{2k+1} durch s teilbar sein muss, bedeutet, dass in der Darstellung von $n_0 = n-1$ jeder zweite Platz mit 0 besetzt sein muss. Also sind die zulässigen n gegeben durch die endlichen Summen

$$n = 1 + \sum_{i \geq 0} a_i s^{2i}, \quad 0 \leq a_i \leq s-1,$$

H. Widmer, Rieden

Weitere Lösungen sandten Ralf Bundschuh (Köln, D), W. Janous (Innsbruck, A), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), A. Müller (Zürich).

Aufgabe 1045. $p = 4n + 3 \geq 7$ sei eine Primzahl. Für Elemente x, y des Primkörpers $Z/(p)$ der Charakteristik p gelte $R(x, y)$ genau dann, wenn $x - y$ quadratischer Rest in $Z/(p)$ ist, d.h. wenn es $u \in Z/(p)$ mit $x - y = u^2 \neq 0$ gibt.

Man zeige, dass zu zwei verschiedenen $x, y \in Z/(p)$ genau n verschiedene $z_1, \dots, z_n \in Z/(p)$ mit $R(x, z_i)$ und $R(y, z_i)$ ($i = 1, \dots, n$) existieren.

K. Schütte, München, D

Lösung (mit Verallgemeinerung): Wir beweisen zuerst einen Hilfssatz, der besagt, dass für ungerade Primzahlen p im Primkörper $Z/(p)$ die quadratischen Reste in einem gewissen Sinne gleichmässig verteilt sind.

Hilfssatz: Es sei $p = 4n + 1$ oder $p = 4n + 3$ eine Primzahl. Zu jedem Element $w \neq 0$ des Primkörpers $Z / (p)$ gibt es dann genau n oder genau $n - 1$ Paare (u, v) quadratischer Reste mit $u - v = w$. Es treten $n - 1$ Paare genau dann auf, wenn $p = 4n + 1$ und w ein quadratischer Rest ist.

Beweis: Ist keines der beteiligten Legendresymbole 0, so ist der Ausdruck

$$\frac{1}{4} \left(1 + \left(\frac{s}{p} \right) \right) \left(1 + \left(\frac{s+w}{p} \right) \right)$$

1 oder 0, je nachdem $(s+w, s)$ ein Paar quadratischer Reste ist oder nicht. Die Summe

$$\left(\frac{1}{4} \sum_{s=0}^{p-1} \left(1 + \left(\frac{s}{p} \right) \right) \left(1 + \left(\frac{s+w}{p} \right) \right) \right) \underbrace{- \frac{1}{4} \left(1 + \left(\frac{w}{p} \right) \right) - \frac{1}{4} \left(1 + \left(\frac{p-w}{p} \right) \right)}_{(*)}$$

beschreibt also die Anzahl der Paare quadratischer Reste mit Differenz w . Die Summanden $(*)$ korrigieren die beiden Fälle $s = 0$ und $s = p - w$, in denen eines der Legendresymbole verschwindet. Ausmultiplizieren führt auf

$$\begin{aligned} & \frac{p}{4} + \underbrace{\frac{1}{4} \sum_{s=0}^{p-1} \left(\frac{s}{p} \right)}_0 + \underbrace{\frac{1}{4} \sum_{s=0}^{p-1} \left(\frac{s+w}{p} \right)}_0 + \underbrace{\frac{1}{4} \sum_{s=0}^{p-1} \left(\frac{s(s+w)}{p} \right)}_{-1, \text{ siehe [1]}} \\ & - \frac{1}{4} \left(1 + \left(\frac{w}{p} \right) \right) - \frac{1}{4} \left(1 + \left(\frac{-w}{p} \right) \right) \\ & = \frac{p-3}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{w}{p} \right) \left(1 + (-1)^{\frac{p-1}{2}} \right) = \begin{cases} n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{w}{p} \right), & \text{wenn } p = 4n + 1 \\ n, & \text{wenn } p = 4n + 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis des Hilfssatzes erbracht.

In der Aufgabe ist nun bei gegebenen x, y mit $w = x - y \neq 0$ nach der Anzahl Möglichkeiten gefragt, ein Element z und quadratische Reste u und v so zu wählen, dass $x - z = u$ und $y - z = v$. Es ist also die Anzahl Möglichkeiten zu bestimmen, bei denen $0 \neq x - y = w = u - v$. Im Fall $p = 4n + 3$ ist nach dem Hilfssatz diese Anzahl n , im Fall $p = 4n + 1$ beträgt sie ebenfalls n mit Ausnahme der Situation, wo $w = x - y$ ein quadratischer Rest ist, also wo $R(x, y)$. Dann gibt es bloss $n - 1$ Möglichkeiten.

H. Widmer, Rieden

Literatur

[1] P. Bundschuh: Einführung in die Zahlentheorie. Springer Verlag

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, D). A.A. Jagers (Enschede, NL), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), B.M.M. de Weger (Enschede, NL).

Aufgabe 1046. Es seien a und b reelle Zahlen sowie x_1, \dots, x_n positive reelle Zahlen mit

$$\sum_{i=1}^n x_i^{-b} \leq \frac{1}{n}.$$

Für die durch

$$g(r) := \left(\sum_{i=1}^n x_i^r \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^{-ar-b} \right); \quad r \in \mathbb{R}$$

definierte Funktion g zeige man, dass

$$g(r)g(s) \leq g(r+s) \quad \text{für alle } r, s \in \mathbb{R} \text{ mit } r \cdot s \geq 0.$$

H. Alzer, Johannesburg, Südafrika

Lösung: Wir benötigen folgendes

Lemma. Genügen $(u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n, (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n$ den Bedingungen

$$(*) \quad (u_i - u_j)(v_i - v_j) \geq 0$$

für alle $i, j = 1, \dots, n$, so gilt

$$(**) \quad \left(\sum p_i u_i \right) \left(\sum p_i v_i \right) \leq \left(\sum p_i \right) \left(\sum p_i u_i v_i \right),$$

wobei hier und im folgenden jede Summation von 1 bis n läuft.

Bemerkung. Für $p_1 = \dots = p_n = 1$ reduziert sich $(**)$ auf die Tschebyscheffsche Ungleichung.

Beweis. Multipliziert man die mit $(*)$ äquivalente Ungleichung $u_i v_i + u_j v_j \geq u_i v_j + u_j v_i$ mit $p_i p_j$ und summiert dann über i und j von 1 bis n , so entsteht

$$\left(\sum p_j \right) \left(\sum p_i u_i v_i \right) \geq \left(\sum p_i u_i \right) \left(\sum p_j v_j \right),$$

also $(**)$, wobei man noch durch 2 gekürzt hat.

Zum Beweis der in der Aufgabe behaupteten Ungleichung sei o.B.d.A. $rs > 0$, d.h. entweder $r, s \in \mathbb{R}_+$ oder $r, s \in \mathbb{R}_-$. In jedem Fall hat man

$$\left(x_i^r - x_j^r \right) \left(x_i^s - x_j^s \right) \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad \left(x_i^{-ar} - x_j^{-ar} \right) \left(x_i^{-as} - x_j^{-as} \right) \geq 0$$

für alle $i, j = 1, \dots, n$, so daß $(*)$ für die beiden ersichtlichen Spezialfälle erfüllt ist. Daher kann man das Lemma mit $p_i = 1, u_i = x_i^r, v_i = x_i^s$ bzw. $p_i = x_i^{-b}, u_i = x_i^{-ar}, v_i = x_i^{-as}$ auf die erste bzw. zweite geschweifte Klammer in der nachfolgenden Formelzeile anwenden und erhält

$$\begin{aligned} g(r)g(s) &= \left\{ \left(\sum x_i^r \right) \left(\sum x_i^s \right) \right\} \left\{ \left(\sum x_i^{-ar-b} \right) \left(\sum x_i^{-as-b} \right) \right\} \\ &\leq \left\{ n \sum x_i^{r+s} \right\} \left\{ \left(\sum x_i^{-b} \right) \left(\sum x_i^{-a(r+s)-b} \right) \right\} = n \left(\sum x_i^{-b} \right) g(r+s), \end{aligned}$$

was wegen der Voraussetzung $\sum x_i^{-b} \leq \frac{1}{n}$ und der Positivität von g höchstens gleich $g(r+s)$ ist.

P. Bundschuh, Köln, D

Weitere Lösungen sandten W. Janous (Innsbruck, A), H.-J. Seiffert (Berlin, D), J. Waldmann (Jena, D).

Aufgabe 1047. Man beweise, dass für die Innenwinkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ eines ebenen Dreiecks die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^3 \cot\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) - 3\sqrt{3} \leq 2 \left(\sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{\alpha_i}\right) - 9/\pi \right)$$

gilt, mit Gleichheit genau im gleichseitigen Fall.

P. Bundschuh, Köln, D

Lösung: In [1] wird mit Hilfe von [2] gezeigt, dass die Funktion

$$f(x) := \cot x - \frac{1}{x}, \quad 0 < x < \pi$$

monoton fallend und konkav ist.

Demnach ist für beliebige $x_1, x_2, x_3 \in (0, \pi)$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \geq \frac{1}{3} (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)).$$

Für $x_1 = \alpha_1/2, x_2 = \alpha_2/2, x_3 = \alpha_3/2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ ergibt sich daraus unmittelbar die vorgelegte Ungleichung mit Gleichheit nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \pi/3$.

Literaturverzeichnis

[1] Abi-Khuzam F.: A new geometric inequality. El. Math. 43, 75–78, (1988)

[2] Mascioni V.: Zur Abschätzung des Brocardschen Winkels. El. Math. 41, 98–101, (1986)

M. Vowe, Therwil

Weitere Lösungen sandten F. Bellot (Valladolid, Spanien), H. Guggenheimer (Basel), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Wassenaar, NL), Kee-wai Lau (Hong Kong), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), W. Moldenhauer (Erfurt, D), J. Waldmann (Jena, D), H. Widmer (Rieden).

Aufgabe 1048. Ein Alphabet A bestehe aus k Konsonanten und v Vokalen. Ein Wort über A heiße regulär genau dann, wenn in ihm von je zwei benachbarten Buchstaben stets mindestens einer ein Konsonant ist. Wieviele n -stellige reguläre Wörter kann man mit den Buchstaben aus A bilden?

J. Binz, Bolligen

1. Lösung: Lässt man in einem n -stelligem regulären Wort mit i Vokalen zwischen den Vokalen je einen Konsonanten weg, so erhält man ein beliebiges Wort der Länge $n-(i-1)$ mit i Vokalen, so dass genau $\binom{n+1-i}{i} v^i k^{n-i}$ reguläre Wörter mit genau i Vokalen möglich sind. Die Gesamtzahl f_n aller regulären Wörter ist daher

$$f_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1-i}{i} v^i k^{n-i}.$$

Mit $f_0 = 1$ können diese Zahlen auch als Koeffizienten der formalen Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = \frac{1 + vz}{1 - kz - vkz^2}$$

erhalten werden.

2. Lösung: Die Menge F_n der regulären n -stelligen Wörter ist die disjunkte Vereinigung

$$F_n = K \times F_{n-1} \cup V \times K \times F_{n-2},$$

wenn K die Menge der Konsonanten und V die Menge der Vokale bezeichnet. Dies liefert die Rekursionsformel $f_n = kf_{n-1} + vkf_{n-2}$ mit den Anfangsbedingungen $f_1 = k + v$, $f_2 = k^2 + 2kv$. Mit dem üblichen Ansatz $f_n = cq^n$ findet man

$$f_n = \frac{1}{k\sqrt{k^2 + 4kv}} \left[\left(\frac{k + \sqrt{k^2 + 4kv}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{k - \sqrt{k^2 + 4kv}}{2} \right)^{n+2} \right].$$

B. Ruh und R. Wyss, Solothurn

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, D), O. Buggisch (Darmstadt, D), H. Friperinger (Voitsberg, A), W. Janous (Innsbruck, A), P. Krauchaler (Bern), A. Lopéz (Valladolid, Spanien), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), A. Müller (Zürich), D. Neuenchwander (Biel), H. Widmer (Rieden).