

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 46 (1991)  
**Heft:** 6

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 30.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

REFERENCES

- 1 Blaschke W., Leichtweiß K.: Elementare Differentialgeometrie. Springer-Verlag, Berlin 1973.
- 2 Birman G. S.: On  $L^2$  and  $L^3$ . El. Math. 43, No. 2, 46–50 (1988).
- 3 O’Neill B.: Semi-Riemannian geometry. Academic Press, New York 1983.
- 4 Strubecker K.: Differentialgeometrie I. de Gruyter, Berlin 1964.

© 1991 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/91/060170-04\$1.50 + 0.20/0

# Aufgaben

## Aufgabe 1040. Durch

$$f(z) := \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{m+n+z}{m+j}^{-1} \quad \text{und} \quad g(z) := \frac{m+n+1+z}{m+1+z} \binom{m+z}{m}^{-1}$$

sind für feste natürliche Zahlen  $m, n$  zwei komplexe Funktionen  $f, g$  gegeben;  $\mathbb{D}$  sei der Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche. Man zeige, dass

$$f(z) = g(z); \quad z \in \mathbb{D}.$$

J. Binz, Bolligen  
Hj. Stocker, Wädenswil

**Solution.**  $f(z)$  can be rewritten as

$$f(z) = m! n! z! (m+n+z)!^{-1} \sum_{j=0}^n \binom{m+j}{j} \binom{z+n-j}{n-j}.$$

Note that for non-integral  $\lambda$ ,  $(\lambda)!$  is to be interpreted as  $\Gamma(\lambda + 1)$ . Then using the known identity [1]

$$\sum_{j=0}^n \binom{m+j}{j} \binom{z+n-j}{n-j} = \binom{m+z+n+1}{n}$$

and  $\Gamma(\lambda + 1) = \lambda \Gamma(\lambda)$ , it follows that  $f(z) = g(z)$ .

REFERENCES

- 1 Gould H. W.: Combinatorial Identities, Morgan town Printing and Binding Co., 1972, p. 22, § 3.2.

M. S. Klamkin, Edmonton, Canada

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), F. Götze (Jena, BRD), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), H.-J. Seiffert (Berlin, BRD), M. Vowe (Therwil).

**Aufgabe 1041.** Man bestimme alle positiven reellen Zahlen  $a$  mit der Eigenschaft

$$(a+x)^{a-x} > (a-x)^{a+x} \quad \text{für alle } x \in (0, a). \quad (1)$$

H. Alzer, Johannesburg, Südafrika

**Lösung.** (1) ist äquivalent mit

$$f(x) := (a-x) \ln(a+x) - (a+x) \ln(a-x) > 0. \quad (2)$$

Die durch (2) in  $(0, a)$  definierte Funktion  $f(x)$  hat folgende Eigenschaften:  $f(x)$  ist in  $(0, a)$  streng konvex, da für die 2. Ableitung gilt

$$f''(x) = 2x(5a^2 - x^2)(a^2 - x^2)^{-2} > 0.$$

Weiterhin ist  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$ , und wegen der Forderung  $f(x) > 0$  für alle  $x \in (0, a)$  muß die Funktion – mit Rücksicht auf ihre Konvexität – außerdem auch streng monoton wachsen. Es ist dann

$$f'(x) = 2(a^2 + x^2)(a^2 - x^2)^{-1} - \ln(a^2 - x^2) > 0,$$

insbesondere

$$\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = 2(1 - \ln a) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < a \leq e.$$

Ergebnis: Genau für alle reellen Zahlen  $a$  mit  $0 < a \leq e$  ( $a$  fest) gilt (1).

F. Götze, Jena, BRD

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), M. S. Klamkin (Edmonton, CD), M. E. Kuczma (Warschau, P), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), H.-J. Seiffert (Berlin, BRD), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil), B. de Weger (Enschede, NL), H. Widmer (Rieden), R. Wyss (Flumenthal).

**Aufgabe 1042.** Zu gegebenem  $n \in \mathbb{N}$  bezeichne  $P_n$  die Menge aller reellen Polynome

$$p = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + 1$$

mit mindestens einer reellen Nullstelle. Man bestimme

$$\kappa_n := \inf \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^2 \mid p \in P_n \right\}$$

W. Janous, Innsbruck, A

**Lösung.** Wegen  $a_n = 1$  ist  $\kappa_n = 1 + \lambda_n$  mit  $\lambda_n := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \mid p \in P_n \right\}$  und wir bestimmen  $\lambda_n$ ; dabei zeigt sich, dass das Infimum tatsächlich ein Minimum ist.

Bei ungeradem  $n$  ist  $\lambda_n = 0$ , da dann das Polynom  $x^n + 1$  eine reelle Nullstelle hat. Ab jetzt sei  $n \geq 2$  gerade; in diesem Fall behaupten wir

$$\lambda_n = 4/(n - 1). \tag{1}$$

Tatsächlich gehört  $p^* := x^n - \frac{2}{n-1}(x^{n-1} + \dots + x) + 1$  wegen  $p^*(1) = 0$  zu  $P_n$  und daher ist  $\lambda_n \leq 4(n - 1)^{-2}(n - 1) = 4/(n - 1)$ . Für (1) brauchen wir also nur noch zu zeigen

$$4/(n - 1) \leq \lambda_n. \tag{2}$$

Ist  $p \in P_1$  und  $x$  eine (dann automatisch von Null verschiedene) Nullstelle von  $p$ , so folgt mittels Cauchy-Schwarzscher Ungleichung

$$(x^n + 1)^2 = (a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x^2) \leq (a_{n-1}^2 + \dots + a_1^2)(x^{2n-2} + \dots + x^2),$$

also

$$f_n(x) := (x^n + 1)^2 / \sum_{0 < i < n} x^{2i} \leq \sum_{0 < i < n} a_i^2.$$

Daher ergibt sich (2) direkt aus

$$4/(n - 1) \leq f_n(x). \tag{3}$$

Setzt man  $u_k := x^k + x^{-k} (\geq 2)$  für gerades  $k \in \mathbb{N}_0$ , so ist (3) wegen der Geradheit von  $n$  äquivalent mit

$$4(u_{n-2} + u_{n-4} + \dots + u_2 + 1) \leq (n - 1)(u_n + 2), \tag{4}$$

was wir nun durch Induktion nach  $n$  beweisen. Für  $n = 2$  ist (4) mit  $2 \leq u_2$  gleichbedeutend, was stimmt. Aus der Richtigkeit von (4) folgt nun auch die Richtigkeit der Formel (4), wenn dort  $n$  durch  $n + 2$  ersetzt wird, da nach Induktionsvoraussetzung

$$4(u_n + u_{n-2} + \dots + u_2 + 1) \leq 4u_n + (n - 1)(u_n + 2)$$

gilt und da die rechte Seite hier nicht größer als  $(n + 1)(u_{n+2} + 2)$  ist. Diese letzte Behauptung ist offenbar mit  $0 \leq (n + 1)u_{n+2} - (n + 3)u_n + 4$  äquivalent, d. h. mit

$$g_n(x) := (n + 1)(x^{2n+4} + 1) - (n + 3)(x^{2n} + x^2) + 4x^{n+2} \geq 0. \tag{5}$$

Da  $n$  gerade ist, darf hier o.B.d.A.  $x > 0$  vorausgesetzt werden, wegen  $x^{2n+4}g_n(\frac{1}{x}) = g_n(x)$  sogar  $x \geq 1$ . Wegen  $g'_n(1) = 0 = g_n(1)$  und

$$g''_n(x) = 2(n + 1)(n + 2)(2n + 3)x^{2n+1} - 2(n + 1)(n + 3)(2n + 1)x^{2n} + 4(n + 1)(n + 2)x^n - 2(n + 3) > 6(n + 1)x^{2n} - 2(n + 3) \geq 4n$$

in  $x \geq 1$  gilt mit einem  $\vartheta_x \in (1, x)$  nach der Taylorformel mit dem Restglied zweiter Ordnung  $g_n(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 g_n''(\vartheta_x) > 0$ , falls  $x > 1$ . Damit ist (5) bewiesen und überdies gilt dort Gleichheit genau für  $|x| = 1$ .

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten H. Guggenheimer (Basel), Kee-Wai Lau (Hong Kong), M. E. Kuczma (Warschau, Polen), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), H. Widmer (Rieden).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis *10. Juni 1992* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

**Aufgabe 1057.** Man berechne die Summe der unendlichen Reihe

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n / (n + \bar{x}_n),$$

wobei  $\bar{x}_n$  den Mittelwert aller im offenen Intervall  $(n, n+1)$  gelegenen Nullstellen der durch

$$f(x) = [x^2] - 2[x]x + [x]^2$$

gegebenen reellen Funktion  $f$  bezeichnet.

Hj. Stocker, Wädenswil

**Aufgabe 1058.** Es seien  $A_1, \dots, A_n$  die Ecken eines regulären  $n$ -Ecks mit Umkreisradius  $R$ ,  $P$  ein beliebiger Punkt auf dem Umkreis. Für  $k \in \mathbf{N}$  sei

$$S_{k,n} := \sum_{i=1}^n |PA_i|^k.$$

Man zeige, dass

$$S_{1,n} \leq (6n)^{1/2} R \tag{1}$$

$$S_{k,n} \geq n \cdot 2^{k/2} R^k \quad \text{für } k \geq 2 \tag{2}$$

D. M. Milosevic, Pranjani, YU

**Aufgabe 1059.** Für natürliche Zahlen  $n$  und  $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  soll die Summe

$$\sum_{k=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} \binom{n-1-2k}{j-2k}$$

geschlossen ausgewertet werden.

H.-J. Seiffert, Berlin, BRD

## Literaturüberschau

B. Streckeisen: Das Differential – die saure Gurke. Nonstandardanalysis für den Schulunterricht. 93 Seiten, Fr. 10. –. Auslieferung: B. Streckeisen, Clos du moulin, CH-2607 Cortébert. 1991.

Eine der didaktischen Knacknüsse des Mittelschulunterrichtes ist die Einführung in die Differentialrechnung: Eine korrekte Behandlung des Grenzwertbegriffes etwa ist für die meisten Schüler schlecht motivierbar, und eine Behandlung, die an Intuition und «Gefühl» appelliert, hinterlässt beim Lehrer Gewissensbisse, gegen die Regeln der mathematischen Zunft verstossen zu haben. Aus diesem Unbehagen heraus hat der Autor des vorliegenden Büchleins versucht, einen dritten Weg zu gehen und die Methoden der Nonstandard-Analysis für den Schulunterricht aufzuarbeiten.

Nach einer Einführung in die grundlegenden Begriffe, insbesondere der Menge der hyperreellen Zahlen, wird der an der Mittelschule übliche Stoff der Differential- und Integralrechnung nach diesen Methoden besprochen. Der Autor setzt sich auch mit Begriffsbildungen und didaktischen Methoden gängiger Fach- und Schulbücher der Analysis auseinander.

Meiner Meinung nach werden die oben besprochenen didaktischen Schwierigkeiten durch die Nonstandard-Analysis nicht eliminiert; sie dürften bei der Einführung der hyperreellen Zahlen wieder auftreten. Gleichwohl ist die vorliegende Schrift eines engagierten Lehrers ein beachtenswerter Beitrag zur Diskussion über die Didaktik der Infinitesimalrechnung.

H. Walser

H. Schupp: Kegelschnitte. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Bd. 12. VIII und 237 Seiten, DM 29,80. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich 1988.

Dieses in der Reihe „Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik“ erschienene Buch behandelt die Kegelschnitte unter den verschiedensten von den Sekundarstufen I und II her zugänglichen Gesichtspunkten. Es kommen synthetische und analytische Methoden zur Sprache, ferner werden die Kegelschnitte in der affinen und der projektiven Geometrie, unter physikalischen, mechanischen und technischen Aspekten behandelt. Lediglich der Zugang über die komplexe Zahlenebene fehlt.

Das Buch richtet sich an Lehramtskandidaten in Ausbildung und Praktikum; dies wird unterstrichen durch die in jedem Abschnitt beigefügten didaktisch-methodischen Bemerkungen. Es kann aber auch dem im Schuldienst stehenden Lehrer einige Anregungen vermitteln, ist aber jedenfalls kein Arbeitsbuch für den Schüler. Für den an Lehrplanfragen interessierten Lehrer ist auch der historische Abriss über die Kegelschnitte als Unterrichtsgegenstand an deutschen Gymnasien lesenswert.

Ob das Einfügen recht langer Programm-Listen (in TURBO-PASCAL 4,0) heute noch zeitgemäss ist, ist fraglich; der interessierte Lehrer wird die ihm zur Verfügung stehenden Informatik-Hilfsmittel selbständig einsetzen.

Mich stört der gelegentlich apologetische Unterton, womit der Autor seiner sicher begrüssenswerten Absicht, der Geometrie und insbesondere den Kegelschnitten zu einer Renaissance im Gymnasialunterricht zu verhelfen, Ausdruck verleihen möchte. Eine solche Wiederbelebung kann nur durch einen attraktiven Unterricht erfolgen.

H. Walser

S. T. Tan: Applied Calculus. Second Edition. International Student Edition. XV und 775 Seiten, £ 21.95. PWS-KENT Publishing Company, Boston 1990.

Der heutige Markt wird geradezu überschwemmt von «Textbooks» über Infinitesimalrechnung. Meistens unterscheiden sie sich weder inhaltlich noch äusserlich wesentlich voneinander. Das vorliegende Buch bildet eine löbliche Ausnahme.