

<b>Zeitschrift:</b>	Elemente der Mathematik
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	46 (1991)
<b>Heft:</b>	6
<b>Artikel:</b>	Klassische Beleuchtungsgeometrie im Ed [Formel]. II, Kinematik in der Beleuchtungsgeometrie des [Formel]
<b>Autor:</b>	Geise, G. / Martini, H.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-43280">https://doi.org/10.5169/seals-43280</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

As we have seen, property (a) is strong enough to prove the asymptotic result of Theorem 2. The advantage of part (b) is that it can be applied to obtain sharper lower bounds when a fairly good initial construction – like  $D_{15}$  – is available.

*Acknowledgements.* I am grateful to H. Kaiser for stimulating discussions related to Problem 1, and to the organizers of the conference «Geometry» for local hospitality at Rauschholzhausen (Germany), October 1990, where the bulk of this research was done.

Zsolt Tuza, Computer and Automation Institute, Budapest

## REFERENCES

- 1 Brooks R. L., Smith C. A. B., Stone A. H., Tutte W. T.: The dissection of rectangles into squares. Duke Math. J. 7, 1940, 312–340.
- 2 Federico P. J.: Squaring rectangles and squares – A historical review with annotated bibliography. In: Graph Theory and Related Topics (A. J. Bondy and U. S. R. Murty, Eds.), Academic Press, 1979, 173–196.
- 3 Kaiser H.: Perfekte Dreieckszerlegungen. El. Math. 46, No. 4, 106–111 (1991).
- 4 Tutte W. T.: The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles. Proc. Cambridge Philos. Soc. 44 (4), 1948, 463–482.

# Klassische Beleuchtungsgeometrie im $E^d$ ( $d \geq 2$ ) II. Kinematik in der Beleuchtungsgeometrie des $E^d$ ( $d \geq 2$ )

In Teil I (vgl. [6]) wurden im  $R^d$  ( $d \geq 2$ ) Scharen aus isophotischen Flächenelementen bezüglich einer klassischen Zentralbeleuchtung  $(q, 1)$  – d. i. Lichtstärke 1 in jeder von der in  $q$  plazierten Lichtquelle ausgehenden Richtung – konstruiert. Gemäss einer in [5] «kinematisch» genannten Vorgehensweise lassen sich nun aus der Zentralbeleuchtung  $(q, 1)$  und solch einer Schar isophotischer Elemente neue isophotische Scharen erzeugen. Diese Methode wird hier, nach kurzer Darlegung, verwendet, um Zusammenhänge zwischen Kurvenklassen aufzudecken, die die klassische Beleuchtungsgeometrie im  $E^d$  ( $d \geq 2$ ) aufgrund ihres dimensionsabhängigen Beleuchtungsstärkegesetzes liefert.

## 1. Ein kinematisches Erzeugungsprinzip

Hat das orientierte Flächenelement  $(x, n)$  mit Trägerpunkt  $x$  und Einheitsnormalenvektor  $n$  die Beleuchtungsstärke  $E > 0$  bezüglich der Zentralbeleuchtung  $(q, 1)$ , so auch das Element  $(q, -n)$  bezüglich der Beleuchtung  $(x, 1)$ . Die Ersetzung

$$((q, 1), (x, n)) \rightarrow ((x, 1), (q, -n))$$

werde «Wechsel der Beleuchtung» genannt; man kann sie durch Spiegelung von Lichtquelle  $\mathbf{q}$  und Element  $(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  am Punkt  $\mathbf{m} := \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{q})$  realisieren. Sei nun

$$\{(\mathbf{x}(\mathbf{v}), \mathbf{n}(\mathbf{v})) \mid \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k) \in V\}$$

eine auf einem gewissen Bereich  $V$  definierte isophotische Element- $k$ -Schar bezüglich der Beleuchtung  $(\mathbf{q}, 1)$ . Dann liefert «Wechsel der Beleuchtung» eine Menge  $M$  aus Paaren zugeordneter Beleuchtungen  $(\mathbf{x}, 1)$  und mit der festen Beleuchtungsstärke  $E$  versehener Elemente  $(\mathbf{q}, -\mathbf{n})$ :

$$M = \{((\mathbf{x}(\mathbf{v}), 1), (\mathbf{q}, -\mathbf{n}(\mathbf{v}))) \mid \mathbf{v} \in V\}.$$

Ist z. B.  $\mathbf{n}(\mathbf{v}) = -\mathbf{n}_0 = \text{const.}$ , wie in dem in Teil I hergeleiteten und nachstehend unter (A) referierten Beispiel, so liefert «Wechsel der Beleuchtung» mit  $(\mathbf{x}(\mathbf{v}), 1)$  Stellen, an denen eine allseitig mit Lichtstärke 1 strahlende Lichtquelle angebracht werden kann, damit das feste Flächenelement  $(\mathbf{q}, \mathbf{n}_0)$  stets die Beleuchtungsstärke  $E$  erhält. In jedem Fall lässt sich aus der Menge  $M$  eine Schar bezüglich einer einzigen Zentralbeleuchtung  $(\mathbf{q}^*, 1)$  isophotischer Elemente dadurch herstellen, dass man jedes Paar  $((\mathbf{x}, 1), (\mathbf{q}, -\mathbf{n})) \in M$  einer (von  $\mathbf{v}$  abhängigen) Bewegung des  $\mathbb{R}^d$  unterwirft, welche  $\mathbf{x}$  nach  $\mathbf{q}^*$  bringt, wobei die verbleibenden Freiheitsgrade geometrisch sinnvoll ausgenutzt werden können. Hier wird (wie in [5]) allein folgender spezieller Fall betrachtet. Von der isophotischen Schar  $\{(\mathbf{x}, \mathbf{n})\}$  werde vorausgesetzt, dass sie einem Streifen angehört: Mit den wünschenswerten analytischen Eigenschaften sei  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$ ,  $\langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{n} \rangle = 0$ ,  $t \in [0, 1]$ . Zur Trägerkurve gebe es ein begleitendes  $d$ -Bein von Vektorfunktionen  $b_1, \dots, b_d$  derart, dass  $b_1(t), \dots, b_d(t)$  für jedes  $t \in [0, 1]$  ein orthonormiertes  $d$ -Tupel sei und dass für  $j = 1, \dots, d$  die  $j$ -te Ableitung  $\mathbf{x}^{(j)}(t)$  in dem durch  $b_1(t), \dots, b_j(t)$  aufgespannten Unterraum liege. Es sei  $B$  die Bewegung des  $\mathbb{R}^d$ , die das  $d$ -Bein zu  $\mathbf{x}(0) =: \mathbf{q}^*$  als Rastkreuz und das von  $t$  abhängige begleitende  $d$ -Bein der Trägerkurve als Gangkreuz besitzt (das entspricht dem Beispiel «Gleiten einer Kurventangente» in [8], S. 17 ff.). Die Umkehrbewegung  $B^{-1}$ , also das Gleiten der Trägerkurve durch eines ihrer  $d$ -Beine, leistet das Gewünschte: Die Elemente  $(B^{-1}\mathbf{q}, -B^{-1}\mathbf{n})$  sind bezüglich der Zentralbeleuchtung  $(\mathbf{q}^*, 1)$  isophotisch. Wir wollen sie (bzw. ihre Trägermenge) das *natürlich-kinematische Erzeugnis* der isophotischen Schar  $\{(\mathbf{x}, \mathbf{n})\}$  nennen.

## 2. Natürlich-kinematische Erzeugung isophotischer Elementscharen aus ebensolchen

Als Ausgangspunkt setzen wir die in [6] hergeleiteten Aussagen für Zentralbeleuchtung mit Quelle im Ursprung  $\mathbf{o}$  des  $\mathbb{R}^d$  und konstanter Lichtstärke 1:

(A) Eine aus der Elementmenge  $\{(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{n} = (-1, 0, \dots, 0)\}$  ausgesonderte isophotische Elementschar konstanter Stellung mit Beleuchtungsstärke  $E (> 0)$  hat die  $x_1$ -Achse zur Symmetrale und ihre Trägermenge ist durch die Meridianschnitte

$$2E^2(x_1^2 + x_2^2)^d = x_1^2 + x_1 |x_1| \quad (1)$$

in der  $x_1, x_2$ -Ebene, welche in der abgeschlossenen Halbebene  $x_1 \geq 0$  liegende Blätter Clairautscher Multiplikatrizen mit Index  $d-1$  sind, bestimmt.  $\square$

**(B)** Ein bezüglich der Beleuchtungsstärke  $E (> 0)$  isophotischer 1-Streifen der Gestalt  $\{(x(v_1), n(v_1)) \mid x_i = u_i = 0 \text{ für } i = 3, \dots, d\}$  hat als Trägerkurve in der  $x_1, x_2$ -Ebene (entweder einen Kreis mit Zentrum  $o$  und Radius  $E^{1-d}$  oder) eine Cassinoide vom Index  $d-1$  mit der (auf die  $x_1$ -Achse bezogenen) Polargleichung

$$\cos(d-1)(\psi - \psi_0) = Er^{d-1}, \quad \psi_0 \in \mathbf{R}. \quad \square \quad (2)$$

**Satz 1:** Die isophotische Elementschar konstanter Stellung  $n_0 = (-1, 0, \dots, 0)$  längs der durch (1) gegebenen Trägerkurve ist bis auf Kongruenz das natürlich-kinematische Erzeugnis des in **(B)** gegebenen Streifens.

*Beweis:* Es sei (2) mit  $\psi_0 = 0$  auf das Gangkreuz  $(q; e_1, e_2)$  bezogen. Zum Beschreiben der Polbahn einer durch ihr begleitendes Zweibein geschobenen Cassinoide tritt als Polarwinkel der Bahnpunkte der orientierte Winkel  $\varphi$  zwischen Kurvennormale und dem negativen Polstrahl von  $x$  in Erscheinung. Er ist bei der in Polkoordinaten  $r = r(\psi)$  gegebenen Cassinoide bestimmt durch  $\sin \varphi = \frac{\dot{r}}{\sqrt{r^2 + \dot{r}^2}}$  bzw.  $\tan \varphi = \frac{\dot{r}}{r}$ . Weil nach (2) explizit

$$r(\psi) = [E^{-1} \cos(d-1) \psi]^{\frac{1}{d-1}}$$

gilt, ergibt dies  $\tan \varphi = \frac{\dot{r}}{r} = -\tan(d-1) \psi$  bzw.  $\varphi = (1-d) \psi + h\pi$  mit  $h \in \mathbb{Z}$ . Der Vergleich mit (2) zeigt, dass die gesuchte Polbahn bezüglich des Rastkreuzes die Polargleichung  $\cos \varphi = Er^{d-1}$  hat, was wegen  $E > 0$ ,  $r \geq 0$  und  $\frac{x_1}{r} = \cos \varphi$  mit (1) gleichwertig ist.  $\square$

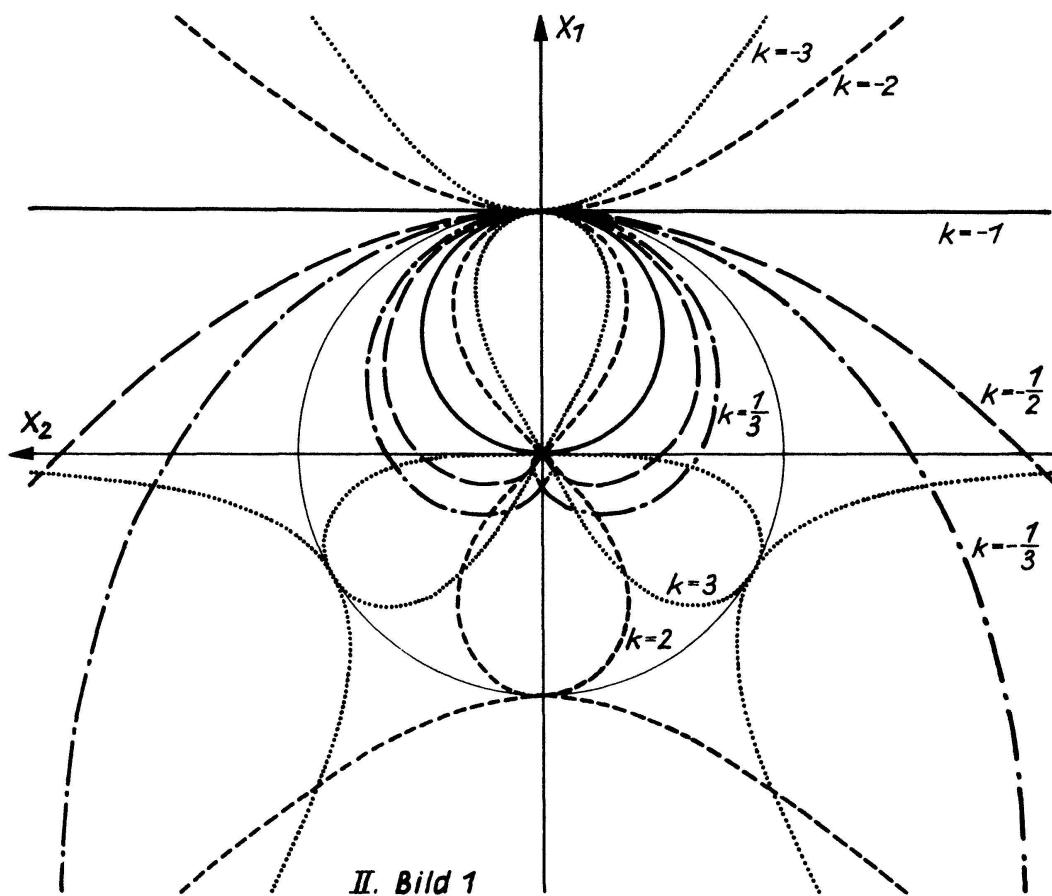
### 3. Natürlich-kinematische Korrespondenz allgemeinerer Kurvenklassen

Cassinoide mit  $d-1$  Brennpunkten ordnen sich in die umfassendere Kurvenklasse der Sinusspiralen ein. Setzt man in (2) anstelle von  $d-1$  eine beliebige reelle Zahl  $k$ , dann ist durch

$$Er^k = \cos k\psi, \quad k \in \mathbf{R}, \quad (3)$$

eine (für irrationales  $k$  transzendent) Sinusspirale  $s_k$  mit Index  $k$  und  $o$  als Pol beschrieben. Die Klasse der Sinusspiralen ist aus verschiedenster Sicht interessant (siehe [2], § 37–§ 46, [7], § V.18, und [9], § 18). Beispielsweise sind diese Kurven durch folgende (bei Ersetzung von  $d-1$  durch  $k$  aus dem vorangegangenen Beweis ableitbare) Eigenschaft charakterisiert:

Bewegt sich der Radiusvektor einer Sinusspirale mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um ihren Pol, so dreht sich die zugehörige Kurventangente mit konstanter (diesbezüglich  $(k+1)$ -facher) Winkelgeschwindigkeit um den Berührpunkt. Des weiteren ist die Inverse einer in (3) gegebenen Kurve in bezug auf ihren Pol wiederum eine Sinusspirale (vom Index  $-k$ ), während ihre Fusspunktkurve bezüglich  $o$  ebenfalls eine solche (mit Index  $\frac{k}{k+1}$  versehene) Kurve ist. Bild 1 zeigt bekannte, in einer anschliessenden Tabelle namlich aufgeführte Repräsentanten dieser Kurvenklasse.



$k$	Bezeichnung
-3	Inverse der Kiepert-Kurve
-2	gleichseitige Hyperbel
$-\frac{1}{2}$	Parabel
$-\frac{1}{3}$	Tschirnhausen-Kubik
0	logarithmische Spirale*
$\frac{1}{3}$	Cayley-Sextik
$\frac{1}{2}$	Kardioide
2	Bernoulli-Lemniskate
3	Kiepert-Kurve

\* Für die Einordnung der logarithmischen Spirale unter Umgehung von (3) sei auf [9], S. 225, verwiesen.

Andererseits motiviert die vollständige Klassifikation der Clairautschen Multiplikatrices in [3] (vgl. ergänzend [4], § 7, und [7], § V.11) auch für diese Kurvenklasse die allgemeine Betrachtungsweise, durch

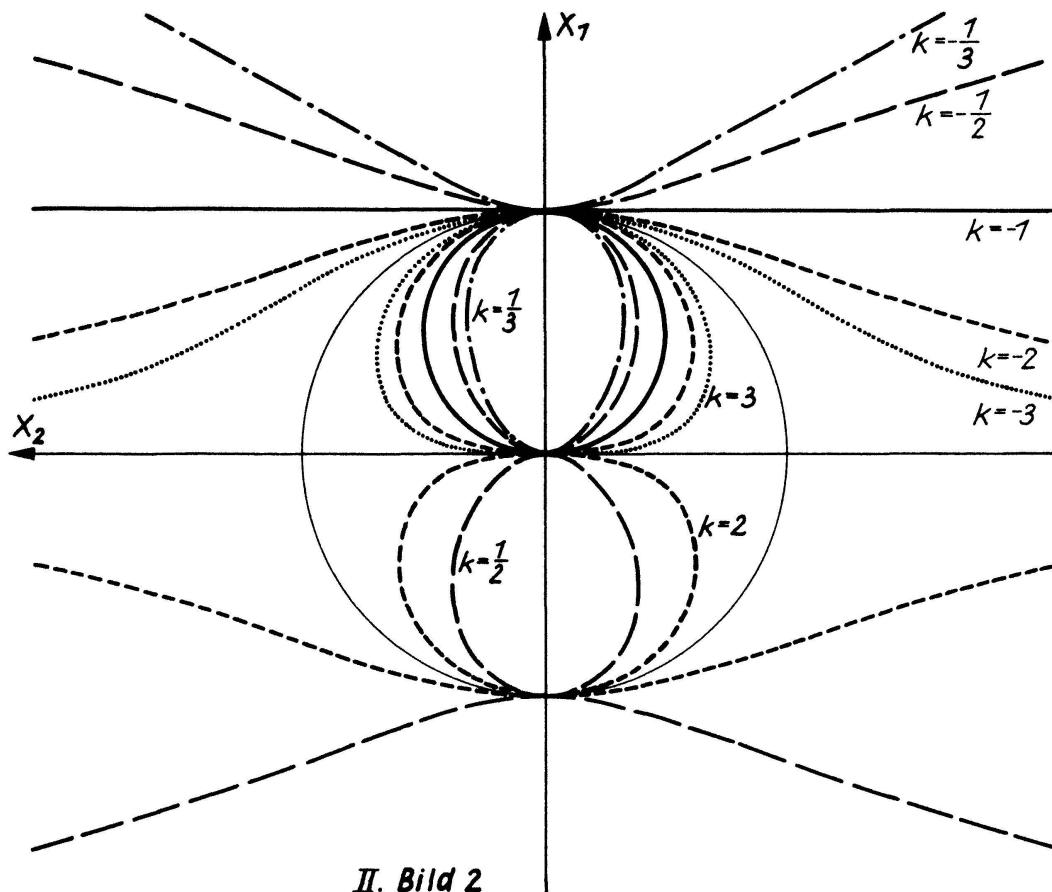
$$Er^k = \cos \varphi, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

eine Multiplikatrix mit Index  $k$  und Pol  $o$  zu charakterisieren.

Die Untersuchung dieser Kurvenklasse geht vor allem auf Alexis Clairaut zurück, der 1726 (als Zwölfjähriger) mit Blick auf das Delische Problem ihre wesentlichen Eigenschaften der Pariser Akademie vorstellte. Jedoch sind zahlreiche Repräsentanten durch andere

Gesichtspunkte, z. B. physikalisch-technische Anwendungen, bekannt geworden (vgl. [3], § 6). Die Inverse einer Multiplikatrix  $m_k$  gehört (mit dem Index  $-k$ ) zur gleichen Kurvenklasse.

Bild 2 zeigt auch hier bekannte Vertreter mit anschliessender namentlicher Aufführung.



$k$	Bezeichnung
-2	Inverse der Playfair-Kurve **
$-\frac{1}{2}$	Kampyla des Eudoxus
$-\frac{1}{3}$	kubische Duplikatrix
0	Gerade durch $\sigma$ ( $E \leq 1$ )
$\frac{1}{3}$	folium simple (Ovoid)
$\frac{1}{2}$	Doppeleinlinie von Münger
2	Kurve des Playfair

\*\* Diese Kurve ist zugleich als besondere Halphönsche Kurve bekannt geworden ([7], S. 123).

Ersetzt man  $d-1$  im Beweis von Satz 1 durch  $k$ , so ergibt sich

**Satz 2:** Lässt man eine Sinusspirale vom Index  $k \in \mathbb{R}$  durch eines ihrer begleitenden Zwei-beine  $(x; \bar{e}_1, \bar{e}_2)$  gleiten, so durchläuft ihr Pol eine Clairautsche Multiplikatrix mit gleichem Index und Pol  $x$ .

Eine beleuchtungsgeometrische Interpretation liegt nahe. Ersetzt man nämlich für eine Zentralbeleuchtung  $(\sigma, 1)$  im  $\mathbb{R}^d$  das klassische Beleuchtungsgesetz ohne Bezug auf die

Raumdimension hypothetisch durch

$$E(x, n) = \frac{1}{2} r^{-k} (\cos \varphi + |\cos \varphi|),$$

so sind (3) und (4) für  $E > 0$  Trägerkurven isophotischer planarer Streifen bzw. isophotischer Elementscharen fester Stellung

$$n = (-1, 0, \dots, 0).$$

Das Ergebnis von Satz 2 findet sich u. W. einzig in einer Fussnote zur Einleitung in [3], als nachgetragene Erwähnung eines von Braude an de Jans übermittelten Resultats. Ausführlich wird in der Literatur nur die (dazu äquivalente) Tatsache dargestellt, dass das Abrollen der Evolute einer Sinusspirale auf einer Geraden als deren Polbahn eine Multiplikatrix hervorbringt (vgl. [1]).

Die folgenden Bilder verdeutlichen die in Satz 2 gegebene kinematische Korrespondenz für spezielle Kurvenpaare. Bild 3 zeigt die Erzeugung der (auch als Radiale einer Parabel darstellbaren) *kubischen Duplikatrix*  $m_{(-\frac{1}{3})}$  der Gleichung

$$x_1^3 = (x_1^2 + x_2^2) E^3$$

aus der *Tschirnhausen-Kubik*  $s_{(-\frac{1}{3})}$  mit

$$27(y_1^2 + y_2^2) = -E \left( y_1 + \frac{4}{E} \right)^3,$$

welche bekanntlich Katakaustik einer Parabel bei achsparallelem Lichteinfall ist und selbige Parabel als Rollkurve hat.

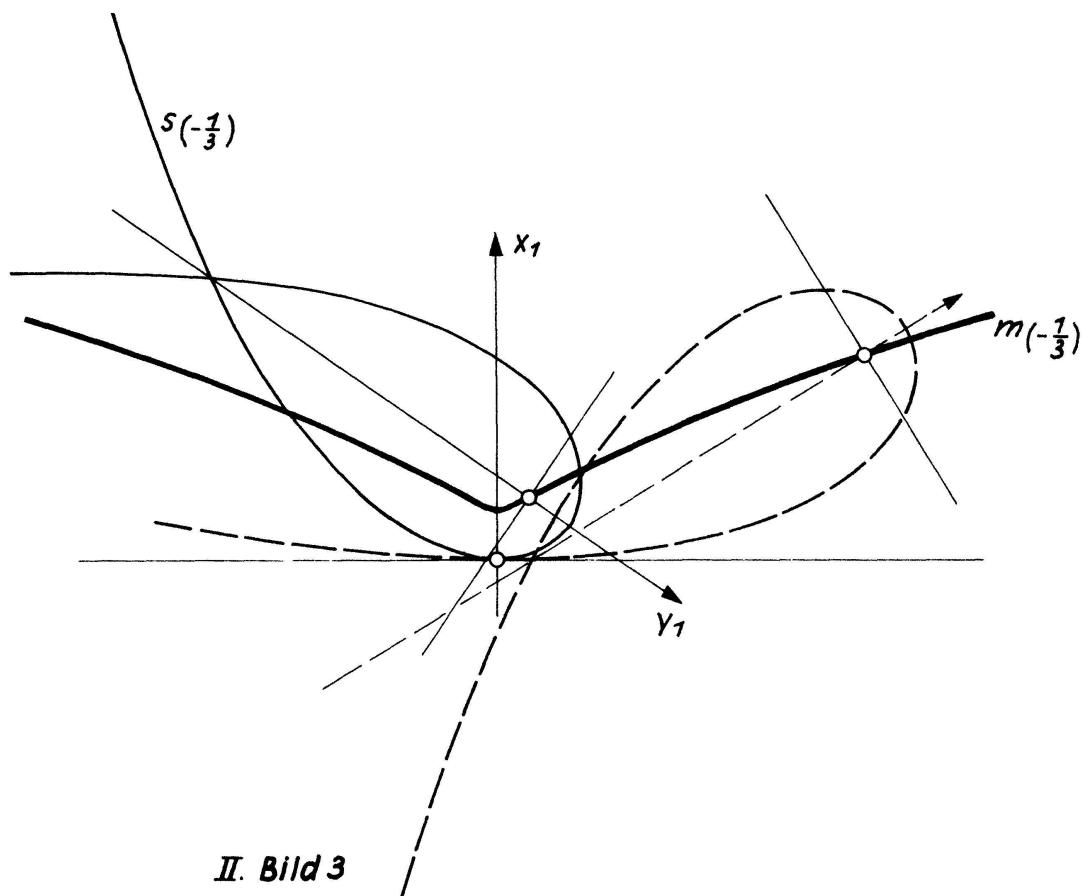


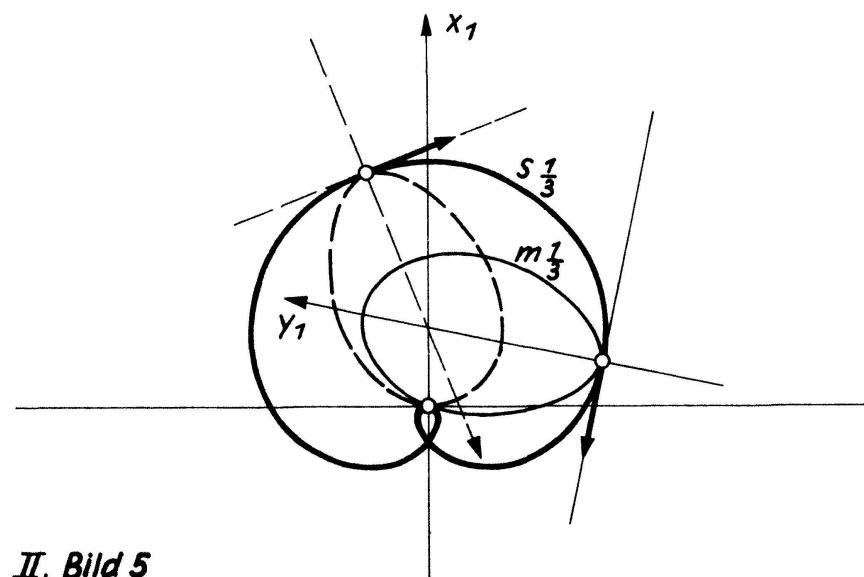
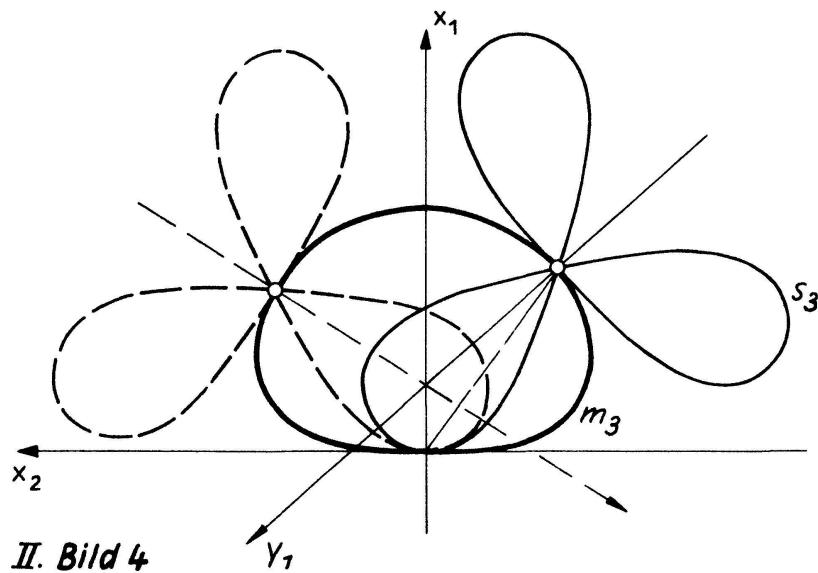
Bild 4 zeigt die *Clairautsche Quartik*  $m_3$  mit der Gleichung

$$E(x_1^2 + x_2^2)^2 = x_1$$

als Erzeugnis der *Kiepert-Kurve*  $s_3$ , gegeben durch

$$E(y_1^2 + y_2^2)^3 = y_1(y_1^2 - 3y_2^2).$$

Fasst man umgekehrt den im Pol einer Multiplikatrix  $m_k$  angreifenden Normalenvektor ihrer Polachse als Tangentenvektor einer kinematisch zu erzeugenden Kurve auf, wobei die Multiplikatrix durch den Ursprung der Rastebene gleiten soll, so entsteht als Polbahn dieses Zwangslaufes eine Sinusspirale  $s_k$ . Bei dieser Erzeugungsart erscheint  $m_k$ , aufgefasst als bewegliche starre Kurve, beleuchtungsgeometrisch als Ort der Lichtquellen, die in dem im Pol von  $m_k$  mitbewegten gewählten Linienelement stets die gleiche Beleuchtungsstärke erzeugen; dieses bewegte Linienelement ist in jedem Stadium der Bewegung Tangentialelement an  $s_k$ .



In Bild 5 ist dargestellt, wie man so aus dem *Ovoid* bzw. «falschen Keplerschen Ei»  $m_{\frac{1}{3}}$  ([4], S. 247) mit der Gleichung

$$y_1^3 = E(y_1^2 + y_2^2)$$

die bekannte *Cayley-Sextik*  $s_{\frac{1}{3}}$ , festgelegt durch

$$E[4E(x_1^2 + x_2^2) - x_1] = 27(x_1^2 + x_2^2)^2,$$

erhält, welche auch als Ort aller Scheitel von Parabeln aufgefasst werden kann, die einen Kreis berühren und einen festen Punkt auf dessen Peripherie als Brennpunkt haben.

G. Geise, Sektion Mathematik, TU Dresden  
H. Martini, Sektion Mathematik, PH Dresden

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Braude, L.: Über Roll- und Fusspunktkurven. Rendic. Circ. Mat. Palermo 35, 280–287 (1912).
- [2] Cesaro, E.; Kowalewski, G.: Vorlesungen über natürliche Geometrie. Leipzig und Berlin, 1926.
- [3] de Jans, C.: Les multiplicatrices de Clairaut. Gent 1912.
- [4] Fladt, K.: Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven. Frankfurt am Main, 1962.
- [5] Geise, G.; Martini, H.: Natürlich-kinematische Erzeugung isophotischer Elementscharen aus ebensolchen bei klassischer geometrischer Zentralbeleuchtung. Beitr. Algebra Geom. 20, 137–147 (1985).
- [6] Geise, G.; Martini, H.: Klassische Beleuchtungsgeometrie im  $E^d$  ( $d \geq 2$ ), Teil I. El. Math. 46, No. 3, 73–78 (1991).
- [7] Loria, G.: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Band 1. Leipzig, 1910.
- [8] Müller, H. R.: Kinematik. Sammlung Göschen, Band 584/584a, Berlin, 1963.
- [9] Wieleitner, H.: Spezielle ebene Kurven. Leipzig, 1908.

## Kleine Mitteilungen

### Constructing the Neumann series – an example

Constructing the Neumann series is a way of finding the solution of the linear integral equation of the second kind with the parameter as a series in powers of that parameter [2, 3].

In this note, we shall construct the Neumann series for the Fredholm type integral equation

$$\theta(\xi) = \theta_0 + v \int_0^\ell \theta(\varepsilon) K(\xi, \varepsilon) d\varepsilon, \quad (1)$$

where  $\ell$  is a real constant,  $0 < \ell < +\infty$ ;  $\theta_0$  is a finite real (or complex) constant;  $v$  is a complex parameter;  $\xi$  and  $\varepsilon$  are the real variables

$$0 \leq \xi, \varepsilon \leq \ell; \quad (2)$$