Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 46 (1991)
Heft: 5

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

3 Niederreiter H.: On the Cycle Structure of Linear Recurring Sequences. Math. Scand. *38* (1976), pp. 53–77.
4 Schinzel A.: Special Lucas Sequences, Including the Fibonacci Sequence, Modulo a Prime. A Tribute to Paul Erdös (A. Baker, B. Bollobás, and A. Hajnal, eds.), pp. 349–357, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
5 Somer L.: Distribution of Residues of Certain Second-Order Linear Recurrences Modulo *p*. Applications of Fibonacci Numbers, Vol. 3 (G. E. Bergum, A. N. Philippou and A. F. Horadam, eds.), pp. 311–324, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1990.
6 Somer L.: Distribution of Residues of Certain Second-Order Linear Recurrences Modulo *p*, II. Fibonacci Quart. *29* (1991), pp. 72–78.
7 Ward M.: The Arithmetical Theory of Linear Recurring Series. Trans. Amer. Math. Soc. *35* (1933), pp. 600–628.
8 Zierler N.: Linear Recurring Sequences. J. Soc. Ind. Appl. Math. *7* (1959), pp. 31–48.

© 1991 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/91/050139-05$1.50 + 0.20/0

Kleine Mitteilungen

Zur Übereinstimmung der Mittelwertstellen von Funktionen und ihren Ableitungen

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, für die $\operatorname{sign}(f'(x)) = c_1$ und $\operatorname{sign}(f''(x)) = c_2$ mit $c_1, c_2 \in \{-1, 1\}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelte. Nach den Mittelwertsätzen der Integral- und Differentialrechnung sind dann die Mittelwertstellen $W(x, a)$ und $w(x, a)$ gemäss (1) und (2) für $x, a \in \mathbb{R}$ wohldefiniert:

$$f(W(x,a)) = \int_a^x f(s)\,ds/(x-a) \tag{1}$$

$$f'(w(x,a)) = (f(x) - f(a))/(x-a). \tag{2}$$

(Für $x = a$ sei $W(x, a) = w(x, a) = x$.)
Im allgemeinen unterscheiden sich beide Mittelwertstellen, für die Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x)$ stimmen sie offensichtlich immer überein. Es stellt sich die Frage, für welche Funktionen f diese Stellen für jedes x und a übereinstimmen. Darüber gibt folgender Satz Auskunft:

Satz: *Für jedes $x, a \in \mathbb{R}$ gelte*

$$W(x,a) = w(x,a). \tag{3}$$

Dann gibt es $\alpha, \beta \neq 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \alpha \exp(\beta x) + \mu.$$

Beweis:

i) Wir zeigen zunächst, dass f unendlich oft differenzierbar ist: Sei a fest. Der Einfachheit halber schreiben wir im Folgenden $w(x)$ statt $w(x, a)$. Es gilt

$$\int_a^x f(s)\,ds/(x-a) = \int_0^1 f(a + t(x-a))\,dt. \tag{4}$$

Aus (1) und (3) folgt daher

$$w(x) = f^{-1}\left(\int_0^1 f(a + t(x-a))\,dt\right),$$

woraus erkennbar ist, dass w ebenso oft differenzierbar ist wie f. Differentiation von (1) nach x ergibt

$$w'(x) = \int_0^1 f'(a + t(x-a))\,t\,dt/f'(w(x)) > 0.$$

Folglich hat $w^{-1}(y)$ dieselbe Differenzierbarkeitsordnung wie f. Sei nun $x > a$. Mit $y = w(x) > a$ folgt aus (2)

$$f'(y) = (f(w^{-1}(y)) - f(a))/(w^{-1}(y) - a).$$

Für $x > a$ hat also f' dieselbe Differenzierbarkeitsordnung wie f. f ist somit dort unendlich oft differenzierbar. Da a beliebig ist, ist f überall unendlich oft differenzierbar und auch w.

ii) Jetzt zeigen wir, dass die Ableitungen $D^k f(a)$ durch $f(a)$, $f'(a)$ und $f''(a)$ eindeutig bestimmt sind, genauer dass gilt

$$D^k f(a) = D^k g(a) \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots,$$

wobei

$$g(x) = A\exp(Bx) + C \quad \text{mit} \quad B = f''(a)/f'(a),$$

$$A = f'(a)/(B\exp(Ba)) \quad \text{und} \quad C = f(a) - A\exp(Ba).$$

Dies erkennt man wie folgt: Man rechnet nach, dass g die Bedingungen (1)–(3) erfüllt und $D^k f(a) = D^k g(a)$ für $k = 0, 1, 2$ gilt.
Nun bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen: Aus (1)–(3) folgt

$$f(w(x)) = \int_0^1 f(a + t(x-a))\,dt \tag{5}$$

$$f'(w(x)) = \int_0^1 f'(a + t(x-a))\,dt \tag{6}$$

n-maliges Ableiten von (5) und (6) nach x ergibt für $x = a$:

$$D^n(f \circ w)(a) = \int_0^1 D^n f(a)\, t^n\, dt = D^n f(a)/(n+1) \tag{7}$$

$$D^n(f' \circ w)(a) = \int_0^1 D^{n+1}(a)\, t^n\, dt = D^{n+1} f(a)/(n+1) \tag{8}$$

Für $n = 1$ folgt aus (7) $w'(a) = 1/2$.
Auswertung der linken Seiten von (7) und (8) ergibt

$$(D^n f) \circ w(a)(w'(a))^n + S_n(a) + (D^1 f) \circ w(a) D^n w(a) = D^n f(a)/(n+1) \tag{9}$$

$$(D^{n+1} f) \circ w(a)(w'(a))^n + R_n(a) + (D^2 f) \circ w(a) D^n w(a) = D^{n+1} f(a)/(n+1) \tag{10}$$

Dabei enthält S_n Ableitungen von f und w höchstens bis zur Ordnung $n-1$ und R_n Ableitungen von f höchstens bis zur Ordnung n und von w maximal vom Grade $n-1$. Wegen $f'(a) \neq 0$ und $f''(a) \neq 0$ können (9) und (10) nach $D^n w(a)$ aufgelöst werden. Man erhält

$$\begin{aligned}(D^n f(a)/(n+1) - (D^n f) \circ w(a)(w'(a))^n - S_n(a))/D^1 f(a) \\ = ((1/(n+1) - (1/2)^n) D^{n+1} f(a) - R_n(a))/D^2 f(a)\end{aligned} \tag{11}$$

Für $n \geq 2$ kann (11) nach $D^{n+1} f(a)$ aufgelöst werden, damit diese Ableitung als Funktion niedrigerer Ableitungen berechnet werden (man beachte, dass wegen (9) die k-te Ableitung von w eine Funktion der ersten k Ableitungen von f ist). Insgesamt sind also alle Ableitungen durch den Funktionswert und die ersten beiden Ableitungen bestimmt.

(iii) Es bleibt zu zeigen, dass f sogar analytisch ist, weil der Identitätssatz dann die Behauptung liefert. Die Analytizität folgt wegen der Konstanz des Vorzeichens von $B = B(a)$ und $A = A(a)$ unmittelbar aus dem

Satz von Bernstein (vgl. [1], S. 267):

Sei g auf $I = (-r, r)$ unendlich oft differenzierbar und gelte für alle grossen n entweder $D^n g(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ oder $(-1)^n D^n g(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, so wird g auf I durch seine Taylorreihe dargestellt.

Entweder sind nämlich (nach evtl. Multiplikation mit -1) alle Ableitungen von f positiv oder alternierend im Vorzeichen.

Lothar Kranz, Klaus Thews,
FH Würzburg-Schweinfurt, Abteilung Schweinfurt

LITERATUR

[1] Walter W.: Analysis 1, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1985.

© 1991 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/91/050143-03$1.50 + 0.20/0

Über die Payne-Pólya-Weinbergersche Vermutung

Die Normalschwingungen einer Membran, welche in der Ruhelage das Gebiet D überdeckt, sind von der Form $\exp[i\omega t]u(x)$, wobei $\mu = \omega^2$ die Eigenwerte und $u(x)$ die zugehörigen Eigenfunktionen des Problems

$$\Delta u + \mu u = 0 \quad \text{in} \quad D, \quad u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial D$$

sind. Es ist wohlbekannt, dass eine abzählbare Menge von Eigenwerten $\mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \ldots$ existiert, die sich im Unendlichen häufen.
1955 haben Payne, Pólya und Weinberger in einer Comptes Rendues Note der Pariser Akademie die folgende Vermutung ausgesprochen: μ_2/μ_1 *nimmt sein Maximum beim Kreis an.*
Sie leiteten die Abschätzung $\mu_2/\mu_1 \leq 3$ her, die nicht allzu weit vom vermuteten Wert 2.539... ist. Diese Vermutung ist keineswegs offensichtlich, denn nach der Ungleichung von Rayleigh-Faber-Krahn nimmt unter allen Gebieten gleicher Fläche μ_1 sein Minimum und nach der Ungleichung von Szegö-Weinberger μ_2 sein Maximum beim Kreis an.
In den nachfolgenden Jahren wurde die Schranke für μ_2/μ_1 verbessert. Brands erhielt 1964 dafür den Wert 2.686, de Vries drei Jahre später 2.658 und Chiti kam 1983 auf 2.586.
Im letzten Jahr haben M. S. Ashbaugh und R. D. Benguria die Vermutung von Payne-Pólya-Weinberger inklusive das mehrdimensionale Analogon vollständig bewiesen.
Der Beweis ist äusserst raffiniert. Er stützt sich einerseits auf die Ideen von Payne-Pólya-Weinberger und Chiti zusammen mit einer neuen Ungleichung über die Nullstellen von Besselfunktionen.

C. Bandle, Mathematisches Institut der Universität, Basel

Aufgaben

Aufgabe 1037. In der Ebene eines Dreiecks ABC mit Seitenlängen a, b, c und Höhenschnittpunkt H sei ein von A, B, C verschiedener Punkt O gegeben. Mit

$$x := a/OA, \quad y := b/OB, \quad z := c/OC$$

beweise man die Ungleichung

$$x + y + z \geq x\,y\,z$$

mit Gleichheit genau für $O = H$. Man diskutiere Spezialfälle.

G. Bercea, München, BRD