Perfekte Dreieckzerlegungen

Autor(en): **Kaiser, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **46 (1991)**

Heft 4

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-43274

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

For any t $(0 < t < 1)$ we can construct a symmetric trapezium T satisfying the conditions of Lemma 3, and having $b/a = t$: simply choose θ to satisfy equation (6). We deduce that for each value of t $(0 \leq t < 1)$, the inequality $w/r + t \leq 3$ holds, with equality for the corresponding maximal trapezium T.

Finally, we observe that in the limit as $t \to 1$, the symmetric trapezium T assumes the form of a square of side length w. In this case the theorem gives $w/r = 2$ as expected.

I am grateful to the referee for some valuable suggestion on the presentation of this paper.

P. R. Scott, University of Adelaide, Adelaide, South Australia

REFERENCES

1 Eggleston H. G., Convexity, Cambridge Tract No. 47, Cambridge University Press (1963).

© 1991 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/91/010102-05$1.50 + 0.20/0

Perfekte Dreieckzerlegungen

Vor 50 Jahren konstruierte R. Sprague [6] zum ersten Mal eine Zerlegung eines Quadrates in paarweise inkongruente Quadrate (55 Teile). Solche Zerlegungen wurden in der Folgezeit *perfekt* genannt, und eine Reihe von Autoren (vgl. die umfassende Literaturübersicht in [4]) suchte nach perfekten Quadratzerlegungen in möglichst wenige Teile. 1978 fand A. J. W. Duijvestijn [3] eine perfekte Zerlegung eines Quadrates in 21 Teile, und mit Hilfe von Computerprogrammen konnte er beweisen, dass damit die minimale Teilezahl erreicht ist. Bereits in [2] wurde bemerkt, dass sich gleichseitige Dreiecke bzw. Würfel nicht in paarweise inkongruente gleichseitige Dreiecke (ohne Beweis) bzw. Würfel (mit Beweis) zerlegen lassen. Naheliegend ist die folgende

Definition. Eine elementar-geometrische Zerlegung eines d-Polyeders Π des d-dimensionalen euklidischen Raumes in Polyeder $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_i$ $(d \geq 2, i \geq 2)$ heisst genau dann *perfekt*, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften hat:

(i) Π_j ist ähnlich zu Π für $j \in \{1, 2, \ldots, i\}$.
(ii) Π_j und Π_k sind inkongruent für $j, k \in \{1, 2, \ldots, i\}$ und $j \neq k$.

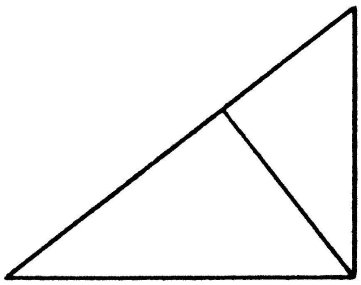

Fig. 1

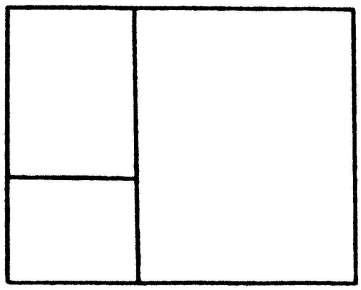

Fig. 2

Als einfache Beispiele zeigen die Figuren 1 bzw. 2 perfekte Zerlegungen eines rechtwinklig-nichtgleichschenkligen Dreiecks (es wird die Höhe auf der Hypothenuse errichtet) bzw. eines Rechtecks mit dem Seitenverhältnis $1:\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}$ (die Seiten sind jeweils im goldenen Schnitt geteilt).
Bisher ist keine perfekte Zerlegung eines d-Polyeders mit $d \geq 3$ bekannt.
Da die Perfektheit einer Quadratzerlegung invariant gegenüber Schrägstreckungen ist, lässt sich jedes Parallelogramm perfekt zerlegen.
Konvexe n-Ecke mit $n \geq 6$ lassen sich nicht in konvexe n-Ecke zerlegen (vgl. [1]) und sind deshalb erst recht nicht perfekt zerlegbar.
Offen bleibt, ob es nichtkonvexe n-Ecke ($n \geq 6$) bzw. Fünfecke bzw. von Parallelogrammen verschiedene Vierecke gibt, die sich perfekt zerlegen lassen. In dieser Arbeit soll die perfekte Zerlegbarkeit aller nichtgleichseitigen Dreiecke gezeigt werden.

Satz 1. *Jedes nichtgleichseitige Dreieck lässt sich perfekt in acht oder weniger Teile zerlegen.*

Beweis. Es sei Δ_1 ein nichtgleichseitiges Dreieck mit den Winkelgrössen α, β und γ. Die Figur 3 zeigt schematisch, wie sich ausgehend von Δ_1 Dreiecke $\Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_{k+1}$ ($k=2n+1$; $n=2, 3, \ldots$) konstruieren lassen, die alle ähnlich zu Δ_1 sind und die zusammen mit Δ_1 eine Zerlegung $\mathfrak{z}$ eines ebenfalls zu Δ_1 ähnlichen Dreiecks Δ bilden.

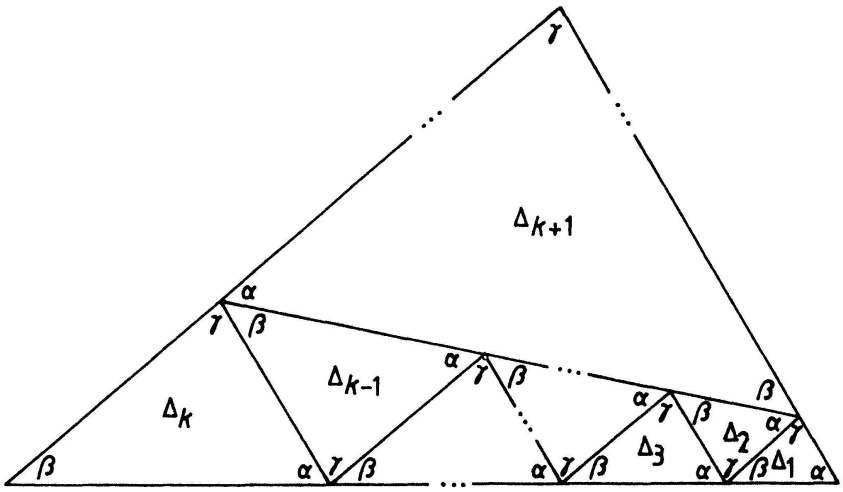

Fig. 3

Da eine Ähnlichkeitsabbildung existiert, die Δ auf das Ausgangsdreieck Δ_1 abbildet und damit der Zerlegung $\mathfrak{z}$ von Δ eine Zerlegung $\mathfrak{z}'$ von Δ_1 in ebenfalls $k+1$ zu Δ_1 ähnliche Dreiecke zuordnet, ist der Nachweis der paarweisen Inkongruenz der Dreiecke aus $\mathfrak{z}$ hinreichend für die Perfektheit von $\mathfrak{z}'$. Im Dreieck Δ_i ($i=1, 2, \ldots, k+1$) sei c_i die Länge der dem Winkel mit der Grösse γ gegenüberliegenden Seite. Ausgehend von c_1 lassen sich durch jeweils zweimaliges Anwenden des Sinussatzes nacheinander die Werte $c_2, c_3, \ldots, c_k$ berechnen. Es ergibt sich

$$c_i = c_1 \cdot \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^{i-1} \quad \text{für} \quad i \in \{1, 2, \ldots, k\}. \tag{1}$$

O.B.d.A. gelte $\alpha > \beta$. Wegen $\alpha + \beta < \Pi$ folgt $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} > 1$, so dass sich aus (1)

$$c_i < c_{i+1} \quad \text{für} \quad i \in \{1, 2, \ldots, k-1\} \tag{2}$$

ergibt. Weiterhin gilt offensichtlich

$$c_{k+1} = \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} c_{2i}, \tag{3}$$

woraus wegen (2)

$$c_i < c_{k+1} \quad \text{für} \quad i \in \{1, 2, \ldots, k-1\} \tag{4}$$

folgt. Auf Grund der Beziehungen (2) und (4) können von den $k+1$ Dreiecken aus $\mathfrak{Z}$ höchstens noch Δ_k und Δ_{k+1} kongruent sein. Die Annahme

$$\Delta_k \cong \Delta_{k+1} \quad \text{(Kongruenz)}$$

ist zu

$$c_k = c_{k+1}$$

und damit wegen (3) auch zu

$$c_k = \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} c_{2i}, \tag{5}$$

äquivalent. Wird (1) in (5) eingesetzt und

$$x := \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

definiert, so ergibt sich

$$x^{k-1} = \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} x^{2i-1},$$

und wegen $x \neq 0$ gilt schliesslich

$$x^{k-2} = \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} x^{2i-2}. \tag{6}$$

Insgesamt zeigt sich also, dass die Zerlegung $\mathfrak{z}'$ von Δ_1 genau dann nicht perfekt ist, wenn die Gleichung (6) gilt. In den Fällen $k=5$ bzw. $k=7$ geht (6) in

$$x^3-x^2-1=0 \tag{7}$$

bzw.

$$x^5-x^4-x^2-1=0 \tag{8}$$

über. Da jede Lösung von (7) auch Lösung von $x^5-x^4-x^2=0$ ist, kann höchstens eine der Gleichungen (7) und (8) erfüllt sein, so dass für nichtgleichseitige Dreiecke, die mit Hilfe der obigen Konstruktion nicht perfekt in sechs Teile zerlegt werden können, eine perfekte Zerlegung in acht Teile möglich ist. □

Satz 2. *Bis auf Ähnlichkeit gibt es genau zwei nichtgleichseitige Dreiecke, die sich mit Hilfe der Konstruktion aus Satz 1 nicht perfekt in sechs Teile zerlegen lassen. Diese Dreiecke sind gleichschenklig und haben die Basiswinkelgrösse* $\arccos\frac{x_0}{2}$ *bzw.* $\arccos\frac{1}{2x_0}$, *wobei*

$$x_0=\sqrt[3]{\frac{29}{54}+\sqrt{\frac{93}{324}}}+\sqrt[3]{\frac{29}{54}-\sqrt{\frac{93}{324}}}+\frac{1}{3} \tag{1}$$

gilt.

Beweis. Aus dem Beweis des Satzes 1 geht hervor, dass sich ein nichtgleichseitiges Dreieck mit Hilfe der dort beschriebenen Konstruktion genau dann perfekt in sechs Teile zerlegen lässt, wenn es Winkel der Grössen α und β mit $\alpha>\beta$ besitzt, so dass $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ keine Lösung der Gleichung $x^3-x^2-1=0$ ist. Diese Voraussetzungen werden durch ein Dreieck Δ offensichtlich nur dann nicht erfüllt, wenn es die folgenden Eigenschaften hat:

(i) Δ ist ein gleichschenkliges Dreieck mit denWinkelgrössen α und β, wobei α die Grösse der Basiswinkel ist.

(ii) Im Falle $\alpha>\beta$ ist $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ und im Falle $\beta>\alpha$ ist $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ eine Lösung der Gleichung $x^3-x^2-1=0$.

Es sei Δ ein Dreieck mit den Eigenschaften (i) und (ii). Die Diskriminante der sich aus $x^3-x^2-1=0$ ergebenden reduzierten kubischen Gleichung ist positiv, so dass es genau eine reelle Lösung x_0 gibt. Die üblichen Lösungsmethoden für kubische Gleichungen liefern die Identität (1). Näherungsweise gilt

$$x_0=1{,}465572.$$

Aus $\Pi=2\alpha+\beta$ (Eigenschaft (i)) ergibt sich

$$\sin\beta=\sin 2\alpha$$

und damit

$$\sin\beta=2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{2}$$

Auf Grund der Eigenschaft (ii) von Δ gilt entweder

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = x_0 \tag{3}$$

oder

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = x_0\,. \tag{4}$$

Aus (2) und (3) folgt

$$\alpha = \arccos\frac{1}{2x_0} \tag{5}$$

und aus (2) und (4)

$$\alpha = \arccos\frac{x_0}{2}\,. \tag{6}$$

Wegen $0 < \frac{x_0}{2} < 1$, $0 < \frac{1}{2x_0} < 1$ und $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ist α in beiden Fällen definiert und eindeutig bestimmt. Aus (1) und (5) bzw. (1) und (6) ergeben sich für die Basiswinkelgrösse von Δ die Näherungswerte

$$\alpha = 1{,}222642 \quad (\text{etwa } 70{,}05°)$$

bzw.

$$\alpha = 0{,}748389 \quad (\text{etwa } 42{,}88°). \quad \square$$

Die Figuren 4 bzw. 5 zeigen, wie sich – jeweils unter Verwendung der Konstruktion aus Satz 1 (vgl. Figur 3, $k=5$) – ein Dreieck mit den Winkelgrössen 110°, 40°, 30° perfekt bzw. ein Quadrat in sieben paarweise inkongruente rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke zerlegen lässt. Dieselbe Konstruktion führt im Falle $k=7$ zu perfekten Zerlegungen der beiden Ausnahmedreiecke aus Satz 2 (Figuren 6 und 7).

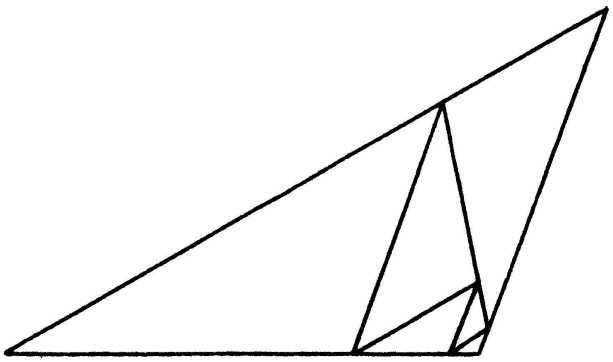

Fig. 4

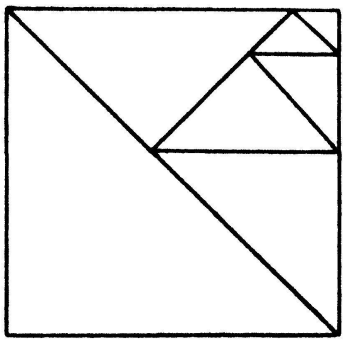

Fig. 5

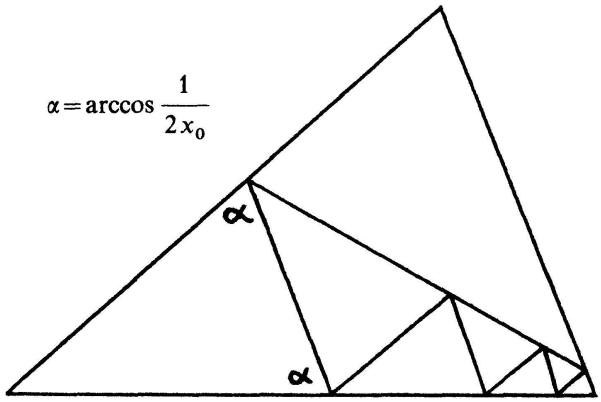

Fig. 6

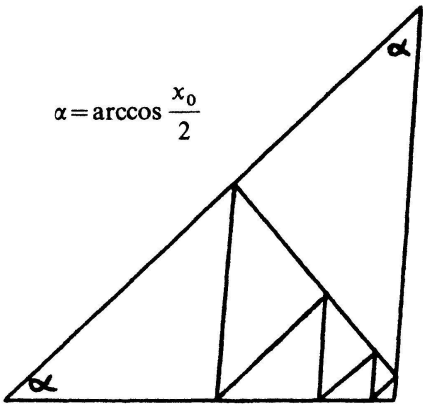

Fig. 7

Anmerkung. Über eine Reihe von Fallunterscheidungen werden in [5] mit einfachen kombinatorisch-topologischen Schlüssen die folgenden Minimalitätsaussagen bewiesen.

(i) Die beiden Dreiecke aus Satz 2 lassen sich nicht in weniger als acht Teile perfekt zerlegen.
(ii) Alle übrigen ungleichseitigen Dreiecke, die nicht rechtwinklig-nichtgleichseitig sind, lassen sich nicht in weniger als sechs Teile perfekt zerlegen.

Aus (i) und (ii) folgt, dass die Zerlegungen der Figuren 4, 6 und 7 jeweils die minimale Anzahl von Teilen realisieren, in die die dargestellten Dreiecke perfekt zerlegt werden können.

H. Kaiser, Friedrich-Schiller-Universität Jena

1 Bleicher M. N.: Decomposition of a k-gon by l-gons. Mitt. Math. Sem. Giessen *166*, 1 16 (1984).
2 Brooks R. L., Smith C. A. B., Stone A. H., Tutte W. T.: The dissection of rectangles into squares. Duke Math. Journal vol. *7* (1940).
3 Duijvestijn A. J. W.: Simple perfect squared square of lowest order. J. Combinatorial Theory *B 25*, 260 263 (1978).
4 Federico P. J.: Squaring rectangles and squares, in: «Graph Theory and related topics», Academic Press 1979.
5 Kaiser H.: Perfekte Dreieckszerlegungen, Preprint (1989).
6 Sprague R.: Beispiel einer Zerlegung des Quadrats in lauter verschiedene Quadrate. Math. Z. *45*, 607 608 (1939).

© 1991 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/91/040106-06$1.50 + 0.20/0

On two characteristic properties of Euclidean norms

0. Introduction

In the analysis of functions of several real variables it is useful to consider different norms on $\mathbb{R}^n$, depending on the problem at hand. This is not a dirty trick, because it can be shown, that on a finite dimensional real vector space all norms are topologically equiv-