

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 46 (1991)  
**Heft:** 3  
  
**Rubrik:** Aufgaben

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Aufgaben

**Aufgabe 1031.** Bezuglich einer reellen Zahl  $r$  seien die Polynome  $f_n$  ( $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) folgendermassen rekursiv definiert:

$$f_0 = 1, \quad f_1(x) = x - r, \quad f_{n+1}(x) = x \cdot f_n(x) - f_{n-1}(x) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Man zeige, dass diese Polynome nur reelle Nullstellen haben, und bestimme in Abhängigkeit von  $r$  das Infimum und das Supremum der Menge aller Nullstellen dieser Polynome.

K. Schütte, München, BRD

**Solution.** First we show that the zeroes of  $f_n$  are separated by those of  $f_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ). It follows immediately that  $f_n$  has  $n$  real zeroes.

We proceed by induction. The zeroes  $(r \pm \sqrt{r^2 + 4})/2$  of  $f_2$  are obviously separated by the zero  $r$  of  $f_1$ . Assume that the zeroes  $x_1 > x_2 > \dots > x_n$  of  $f_n$  separate those of  $f_{n-1}$ .

Because of  $\operatorname{sgn} f_{n-1}(x_k) = (-1)^{k-1}$  and the recurrence we have  $\operatorname{sgn} f_{n+1}(x_k) = (-1)^k$  ( $1 \leq k \leq n$ ). From  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_{n+1}(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} \infty$  and continuity arguments it follows that the  $n+1$  zeroes of  $f_{n+1}$  separate those of  $f_n$ .

Next, we study the closure of the convex hull of the set of zeroes of  $\{f_n\}$ .

We start with  $r=0$ . The substitution  $x = z + \frac{1}{z}$  yields

$$f_n(x) = \varphi_n(z) = z^n + z^{n-2} + \dots + z^{-n+2} + z^{-n} = \frac{z^{n+1} - z^{-n-1}}{z - z^{-1}},$$

which has zeroes for  $z = \exp \frac{\pi i k}{n+1}$  ( $1 \leq |k| \leq n$ ) or  $x_k = 2 \cos \frac{\pi k}{n+1}$  ( $1 \leq k \leq n$ ). The limits are  $-2$  and  $+2$  (take  $k=n$  and  $k=1$ , respectively).

Now let  $r \neq 0$ . Observe that under the transformation  $x = z + \frac{1}{z}$  the real  $x$ -axis corresponds to the union of the real  $z$ -axis and the unit circle  $|z|=1$  ( $z \neq 0$ ). We find

$$\begin{aligned} f_n(x) &=: g_n(z) = \varphi_n(z) - r \varphi_{n-1}(z) \\ &= \frac{z^{n+1} - r z^n + r z^{-n} - z^{-n-1}}{z - z^{-1}} = \frac{z^{2n+2} - r z^{2n+1} + r z - 1}{z^{n+1} (z - z^{-1})}. \end{aligned}$$

The numerator in this expression has at most 4 real zeroes ( $z = \pm 1$  included) because its second derivative has 2 real zeroes, namely  $z=0$  and  $z=nr/(n+1)$ . It is immediately seen that for  $|r| > 1$  the remaining two real zeroes tend to  $r$  and  $r^{-1}$ , respectively, so that the corresponding real zero for  $f_n(x)$  tends to  $r + r^{-1}$  as  $n \rightarrow \infty$ .

The remaining zeroes of  $g_n(z)$  are on the unit circle:  $z = \exp(it)$  yields

$$g_n(z) =: h_n(t) = \frac{\sin((n+1)t) - r \sin nt}{\sin t} \quad (0 < t < \pi).$$

Since  $\frac{\sin(n+1)t}{\sin nt}$  runs continuously from  $\pm\infty$  to  $\mp\infty$  in each interval  $\left(\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right)$  ( $1 \leq k \leq n-2$ ), it attains the value  $r$  on this interval, resulting in a zero for  $h_n(t)$ . So the zeroes of this kind lead to zeroes of  $f_n(x)$  that yield a dense subset of  $[-2, 2]$ . For  $0 < |r| < 1$  the polynomials

$$z^{2n+2} - 1 \quad \text{and} \quad z^{2n+2} - rz^{2n+1} + rz - 1,$$

by Rouché's theorem, have equally many zeroes inside every circle  $|z| = 1 + \delta$  ( $\delta > 0$ ), so there are no zeroes on the real axis outside the interval  $[-1, 1]$ .

Summarizing, the closure of the context hull of all zeroes of all  $f_n$  equals

$$\text{the interval} \quad [-2, 2] \quad \text{if } r \in [-1, 1]$$

$$\text{the convex hull of} \quad \left\{ r + \frac{1}{r}, [-2, 2] \right\} \quad \text{if } |r| > 1.$$

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten E. A. van Doorn (Enschede, NL; 2 Lösungen), H. Guggenheimer (Basel; Teillösung), A. A. Jagers (Enschede, NL), M. E. Kuczma (Warschau, PO; Teillösung).

**Aufgabe 1032.** Man beweise: Wenn mit  $L_r(x, y)$  die Mittelwertfamilie

$$L_r(x, y) = \left[ \frac{x^r - y^r}{r \ln(x/y)} \right]^{1/r}, \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x > 0, \quad y > 0$$

bezeichnet wird, dann gilt für alle  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und für alle positiven reellen Zahlen  $x$  und  $y$  mit  $x \neq y$

$$\sqrt{xy} < \frac{1}{2}(L_r(x, y) + L_{-r}(x, y)) < \frac{x+y}{2}. \quad (1)$$

H. Alzer, Johannesburg, Südafrika

**Lösung.** Für das Produkt der positiven Größen  $L_r$  und  $L_{-r}$  findet man leicht

$$L_r(x, y) L_{-r}(x, y) = xy. \quad (2)$$

Der linke Teil der doppelten Ungleichung (1)

$$\sqrt{L_r L_{-r}} < \frac{1}{2}(L_r + L_{-r})$$

ist damit immer erfüllt (nach bekannter Beziehung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel). Der Beweis des rechten Teils von (1) bereitet mehr Mühe. Zunächst

kann man in der Summe

$$S_r(x, y) := L_r(x, y) + L_{-r}(x, y)$$

wegen der Symmetrieeigenschaften

$$S_r(x, y) = S_r(y, x) = S_{-r}(x, y) = S_{-r}(y, x)$$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $r > 0, x > y > 0$  voraussetzen.  
Wir betrachten nun die reellen Funktionen

$$f(t) = t - 1 - \ln t, \quad g(t) = 1 - t + t \ln t.$$

Beide sind für  $t > 1$  wegen der Positivität der ersten Ableitungen

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t} > 0, \quad g'(t) = \ln t > 0$$

in  $(1, \infty)$  streng monoton wachsend, und da  $f(1) = 0, g(1) = 0$  gilt, ist für  $t > 1$

$$f(t) > 0, \quad g(t) > 0. \quad (3)$$

Aus (3) folgt

$$1 < \frac{t-1}{\ln t} < t, \quad \text{gültig für alle } t > 1. \quad (4)$$

Ersetzt man jetzt  $t$  durch

$$t = (x/y)^r \quad \text{mit} \quad x > y > 0, \quad r > 0,$$

so wird aus (4)

$$y^r < \frac{x^r - y^r}{r \ln(x/y)} < x^r,$$

d. h. es ist

$$y < L_r(x, y) < x.$$

Als Folgerung hieraus erscheint die Ungleichung

$$(x - L_r)(L_r - y) > 0,$$

die unter Benutzung von (2) in

$$L_r(x - L_r - L_{-r} + y) > 0$$

umgeformt werden kann. Man hat also

$$L_r(x, y) + L_{-r}(x, y) < x + y,$$

was den rechten Teil der doppelten Ungleichung (1) beweist. Insgesamt ist damit die Gültigkeit von (1) für alle Werte

$$r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x > 0, \quad y > 0 \quad (x \neq y)$$

nachgewiesen.

F. Götze, Jena, BRD

Weitere Lösungen sandten A. Bege (Miercurea-Ciuc, Rumänien), G. Bercea (München, BRD), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hong Kong), M. E. Kuczma (Warschau, PO), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), K. Schütte (München, BRD), H.-J. Seiffert (Berlin, BRD; 2 Lösungen), M. Vowe (Therwil), J. Waldmann (Jena, BRD).

### Aufgabe 1033. Die Nullstellen des Polynoms

$$f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0; \quad n \geq 2, \quad \text{alle } a_i \in \mathbb{R}$$

seien sämtliche reell. Man zeige, dass

$$2a_{n-2} \leq a_{n-1}(a_{n-1} + |a_0|^{1/n}).$$

Wann genau gilt Gleichheit?

W. Janous, Innsbruck, A

**Lösung.** Bezeichnen  $x_1, \dots, x_n$  die reellen Nullstellen des Polynoms  $f$ , so gilt

$$a_0 = (-1)^n \prod_{i=1}^n x_i, \quad a_{n-2} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j, \quad a_{n-1} = - \sum_{i=1}^n x_i.$$

Wegen

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2$$

ist die behauptete Ungleichung äquivalent zur Ungleichung

$$\left( \prod_{i=1}^n |x_i| \right)^{1/n} \sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Letztere folgt offensichtlich durch Anwendung der Dreiecksungleichung, der arithmetisch-geometrischen Ungleichung, sowie der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung. Es gilt Gleichheit genau dann, wenn alle Nullstellen von  $f$  gleich und nicht negativ sind.

H.-J. Seiffert, Berlin

Weitere Lösungen standen A. Bege (Miercurea-Ciuc, Rumänien), G. Bercea (München, BRD), H. Guggenheimer (Basel), A. A. Jagers (Enschede, NL), M. E. Kuczma (Warschau, PO), Kee-Wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), W. Moldenhauer (Erfurt, BRD), K. Schütte (München, BRD), M. Vowe (Therwil), J. Waldmann (Jena, BRD), R. Wyss (Flumenthal).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Dezember 1991* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68), Problem 872 A (Band 36, S. 175), Aufgabe 880 (Band 37, S. 93).

**Aufgabe 1049.** Unter allen einem gegebenen Parallelogramm einbeschriebenen Ellipsen bestimme man diejenige mit maximalem Flächeninhalt.

L. Kuipers, Sierre

**Aufgabe 1050.** Man ermittle

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2) + x \cdot \arctan x}{x \cdot (4+x^2)} dx.$$

A. A. Jagers, Enschede, NL

**Aufgabe 1051.** Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend und konkav. Für  $n \geq 2$  gelte ferner  $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq b$ . Dann ist

$$\sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{x_i + x_{n+i-1}} \geq \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{x_i + x_{i+1}} \quad (x_{n+1} := x_1). \quad (1)$$

Falls  $f$  abnehmend und konvex ist, so gilt (1) mit  $\leq$  statt  $\geq$ . Dies ist zu zeigen.

W. Janous, Innsbruck, A

## Literaturüberschau

J. Dieudonné: A History of Algebraic and Differential Topology; 1900–1960. XXI und 648 Seiten, Fr. 140.—. Birkhäuser, Boston, Basel 1989.

Née au tout début de ce siècle avec les travaux de Henri Poincaré, la topologie algébrique est devenue l'un des outils de base des mathématiques contemporaines. L'un de ses domaines d'application privilégiés est la topologie différentielle (par exemple, les surfaces sont classées à difféomorphisme près par leur groupe fondamental, un outil de topologie algébrique).

Dans ce livre, J. Dieudonné s'attelle à la tâche de donner une idée de l'évolution de ces deux sujets (surtout la topologie algébrique) de 1900 à 1960. Cette date terminale est, selon l'auteur, arbitraire et choisie dans le seul but de limiter la taille de L'ouvrage. Remarquons cependant qu'elle coïncide à peu près avec le début de la topologie différentielle moderne (travaux de Milnor, Smale, chirurgie, etc.).

L'option de l'auteur est de se baser uniquement sur le matériel écrit et publié. Sa chronologie est strictement celle des publications. On ne trouvera donc pas d'anecdote, ni d'analyse des motivations des mathématiciens, de leurs essais infructueux, etc. Pas non plus de réelle synthèse, à la lumière des développements plus récents. Cela aurait été évidemment difficile à l'auteur qui n'est pas un spécialiste du sujet et n'a pas été directement associé à son développement.

Le livre de Dieudonné est donc essentiellement un survol des principaux articles parus sur le sujet, qu'il a classés selon quelques thèmes (homologie, homotopie, etc.). La compilation de cette abondante littérature (plus de 500 articles cités) représente un travail considérable.

Pour l'étudiant et l'enseignant, cet ouvrage est un document utile qui l'aidera à trouver son chemin parmi les références bibliographiques sur le sujet. Il donne une certaine idée de son évolution, dans les limites indiquées ci-dessus. Son intérêt majeur est sans doute dans la transcription résumée en langage moderne des grands articles de la période historique (Poincaré, Brouwer, etc.). Elle permettra de faciliter et d'encourager la lecture de ces documents fondamentaux.

J.-C. Hausmann

H. Struve: Grundlagen einer Geometriedidaktik. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Band 17. 280 Seiten, 131 Figuren, DM 34.—. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich 1990.

Der Autor vertritt anhand einer Analyse des Geometrie-Lehrmittels „GAMMA“ den Standpunkt, dass der Geometrie-Unterricht auf der Sekundarstufe I eine empirische Geometrie zum Inhalt hat. Daher ist auf dieser Stufe eine Gerade durchaus endlich, nötigenfalls verlängerbar. Dies entspricht auch dem historischen Entwicklungsgang der Geometrie, wie durch eine Rekonstruktion der Elemente Euklids nachgewiesen und durch Querbezüge zur Kunst der alten Griechen erhärtet wird. Nach der Meinung des Autors war die Geometrie damals zunächst eine in einem Nahbereich relevante „Tast-Geometrie“ und entwickelte sich erst später zu einer „Seh-Geometrie“, in welcher der Begriff des Unendlichen erscheint. Dieser Ansicht wird anhand der Geometrie-Geschichte von Descartes bis Klein durch Beispiele und Zitate belegt. Das letzte Kapitel ist eine formale Darstellung der empirischen Geometrie.

Das Buch gibt wenig konkrete Handlungsanweisungen für den Unterrichtspraktiker oder den angehenden Lehrer. Die Intention des Autors geht vielmehr dahin, zu zeigen, dass fundierte Hinweise zur Unterrichtsgestaltung nicht möglich seien und eine ehrliche Didaktik der Geometrie sich darauf beschränken müsse, relevante Probleme zu formulieren und die Konsequenzen der Lösungsvorschläge systematisch aufzuzeigen.

H. Walser