

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 46 (1991)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Klassische Beleuchtungsgeometrie im [Formel]. I, Bekannte Kurvenklassen in der Beleuchtungsgeometrie des [Formel]  
**Autor:** [s.n.]  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43271>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

- 5 deValcourt B. A.: Axially symmetric polygons inscribed in and circumscribed about convex sets. *Elem. Math.* 22, 121–133 (1967).
- 6 Giering O.: Ein mechanisches Modell zur Lösung gewisser Extremalaufgaben. *Elem. Math.* 22, 5–11 (1967).
- 7 Grünbaum B.: Measures of symmetry for convex sets. *Proc. Symp. Pure Math.*, Amer. Math. Soc. 7, 233–270 (1963).
- 8 Krakowski F.: Bemerkung zu einer Arbeit von W. Nohl. *Elem. Math.* 18, 60–61 (1963).
- 9 Nohl W.: Die innere axiale Symmetrie zentralischer Eibereiche der euklidischen Ebene. *Elem. Math.* 17, 59–63 (1962).

## Klassische Beleuchtungsgeometrie im $E^d$ ( $d \geq 2$ )

### I. Bekannte Kurvenklassen in der Beleuchtungsgeometrie des $E^d$ ( $d \geq 2$ )

Untersuchungen zur Beleuchtung von Flächen sind naturgemäß mit der Physik und Geometrie des dreidimensionalen euklidischen Raumes  $E^3$  verknüpft. Gerade in jüngster Zeit hat die *Beleuchtungsgeometrie* eine merkliche Wiederbelebung erfahren, so dass auch Betrachtungen, die über eigentliche Anregungen hinausgehen, nahegelegt werden. Dazu gehört eine Übertragung klassischer Ergebnisse auf den beliebigdimensionalen Raum  $E^d$  ( $d \geq 2$ ).

#### 1. Begriffswelt mit $d$ -dimensionalem Abstandsgesetz

Grundbegriffe der auf den  $E^3$  bezogenen Beleuchtungstechnik und -geometrie werden sinngemäß aus [8] bzw. [3] übernommen. Der geometrische Raum  $E^d$  ( $d \geq 2$ ) sei bezüglich eines kartesischen Normalkoordinatensystems durch den Raum der Koordinatenvektoren  $R^d$  beschrieben, wobei Punkte durch ihre Koordinatenvektoren bezeichnet sind (z. B.  $x$ ). Weiterhin steht  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  für das *innere Produkt*,  $\|\cdot\|$  für die *euklidische Norm*,  $S^{d-1} := \{u \in R^d | \langle u, u \rangle = 1\}$  für die *Einheitssphäre* und  $o$  für den *Koordinatennullpunkt* des  $E^d$ .

Ein *orientiertes Flächenelement* sei mit  $(x, u)$  bezeichnet, wobei  $x \in R^d$  den Träger und  $u \in S^{d-1}$  den Stellung und Orientierung des Elements angebenden Normaleneinheitsvektor bedeuten. Ist  $(x, u)$  von  $t$  Parametern  $v_1, \dots, v_t$  abhängig, dann liegt (im Anschluss an [6], S. 528 ff. und S. 33 ff., sowie [4], S. 102 ff.) eine *Element-t-Schar* vor.

Für  $\{x(v_1, \dots, v_t), u(v_1, \dots, v_t)\}$  seien alle wünschenswerten analytischen Eigenschaften vorausgesetzt und uninteressante Ausartungen ausgeschlossen. Eine Elementschar ist ein *Element-t-Verein*, wenn in jedem Punkt der Trägermannigfaltigkeit  $\{x(v_1, \dots, v_t)\}$  die durch  $u$  beschriebenen  $(d-1)$ -Ebenen den Tangentialraum enthalten. Insbesondere sind hier jene Elementvereine  $\{x(v_1), u(v_1)\}$  interessant, die im differentialgeometrischen Sinne *Streifen* bilden (Streifenbedingung:  $\langle \dot{x}, u \rangle = 0$ ). Eine *geometrische Zentralbeleuchtung* des  $E^d$  wird durch das Paar  $(q, I(n))$  beschrieben, wobei  $q \in R^d$  die punktförmige Lichtquelle

repräsentiert und  $I(\mathbf{n})$  die den orientierten Abstrahlrichtungen  $\mathbf{n} \in S^{d-1}$  je zugeordnete Lichtstärke von  $\mathbf{q}$  wiedergibt.

Ist  $I(\mathbf{n}) > 0$  konstant über  $S^{d-1}$ , so erhält man die hier ausschliesslich betrachtete, bezüglich der Dimension verallgemeinerte *klassische Zentralbeleuchtung*.

Die *Beleuchtungsstärke* des Elements  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  mit  $\mathbf{x} \neq \mathbf{q}$  ist durch

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{u}) := I(\mathbf{n}) \cdot r^{1-d} \cdot \frac{1}{2}(\cos \varphi + |\cos \varphi|) \quad (1)$$

mit den Vereinbarungen  $\varphi := \star(\mathbf{q} - \mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $r := \|\mathbf{q} - \mathbf{x}\|$  und  $\mathbf{n} := \frac{\mathbf{x} - \mathbf{q}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|}$  gegeben. Diese

Beziehung (1) stellt eine Verallgemeinerung des klassischen *photometrischen Abstandsge setzes*

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{u}) := \begin{cases} I(\mathbf{n}) \cdot r^{-2} \cdot \cos \varphi & \text{für } 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi \end{cases} \quad (1^*)$$

im  $E^3$  dar. Mit der Vereinfachung  $\mathbf{u} = -\mathbf{n}$  wird (1\*) bekanntlich aus dem sogenannten *Lichtstrom-Flächen-Gesetz*

$$E(\mathbf{x}, -\mathbf{n}) = \frac{\Omega}{4\pi r^2} \quad (2^*)$$

hergeleitet (vgl. [8], § I), in dem  $\Omega := \int_{S^2} I(\mathbf{n}) d\mathbf{n} = 4\pi \cdot I(\mathbf{n})$  den Gesamtlichtstrom der

Quelle  $\mathbf{q}$  mit über  $S^2$  konstant gedachter Lichtstärke  $I(\mathbf{n}) > 0$  darstellt. Durch Modifikation der dimensionsabhängigen Grössen in (2\*) erhält man für den  $R^d$

$$E(\mathbf{x}, -\mathbf{n}) := \frac{\Omega \cdot r^{1-d}}{d\omega_d}, \quad \text{wo} \quad \omega_d := \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right)}, \quad (2)$$

was durch Vereinfachung und unter Berücksichtigung des dimensionsunabhängigen Faktors

$$\frac{1}{2}(\cos \varphi + |\cos \varphi|) = \frac{1}{2}(\langle -\mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle + |\langle -\mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle|)$$

bei durch beliebiges  $\mathbf{n}$  beschriebenem Lichteinfall im Element  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  unmittelbar auf (1) führt.

Oriente Flächenelemente, die bei einer geometrischen Zentralbeleuchtung gleiche (positive) Beleuchtungsstärke haben, heissen *isophotisch*; Mengen aus isophotischen Flächenelementen werden *isophotische Elementmengen*, speziell also isophotische Scharen, Streifen, Flächen etc., genannt.

## 2. Isophotische Elementscharen fester Stellung

Für eine klassische geometrische Zentralbeleuchtung  $(q, I(n)) = (o, 1)$  sollen hier aus allen Elementen  $(x, u)$  mit fixiertem  $u = -e_1 := (-1, 0, \dots, 0)$  und  $x \in R^d \setminus \{o\}$  jene gleicher Beleuchtungsstärke  $E > 0$  ausgewählt werden. Die Frage nach entsprechenden Elementscharen im  $E^3$  wurde von Bohne [1] angeregt. Aus (1) (o.B.d.A. mit  $I(n) = 1$ ) wird deutlich, dass die gesuchte Elementschar die Gerade durch  $q = o$  mit  $-e_1$  als Richtungsvektor zur Symmetrale hat. Mit  $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$  und  $\cos \varphi = \frac{x_1}{r}$  hat diese isophotische Elementmenge folglich die Darstellung

$$\{(x, -e_1) | x \in R^d \text{ mit } 2E(x_1^2 + \dots + x_d^2)^{\frac{d}{2}} = x_1 + |x_1|\} \quad (3)$$

und ist durch ihren Schnittmeridian

$$2E(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{d}{2}} = x_1 + |x_1| \quad (4)$$

in der  $x_1, x_2$ -Ebene hinreichend bestimmt.

Gleichung (4) ist für  $d = 2p$  ( $p \in N^*$ ) eine inverse, monosymmetrische *Clairaut-Multiplikatrix* 2. Art vom Index  $2p - 1$  (vgl. die Monographien [5], § II, und [7], § V.11). Für  $d = 2p + 1$  liefert (4) durch Quadrieren ebenfalls algebraische Kurvengleichungen, nämlich in

$$2E^2(x_1^2 + x_2^2)^{2p+1} = x_1^2 + x_1|x_1| \quad (4^*)$$

die Darstellung (jeweils eines Blattes) bisymmetrischer, inverser *Clairaut-Multiplikativen* 2. Art vom Index  $2p$  (siehe erneut [5] und [7]). Wir fassen (4) und (4\*) zusammen in

**Satz 1:** Eine isophotische Elementschar

$$\{(x, u) | x \in R^d; u = -e_1 = (-1, 0, \dots, 0)\}, \quad d \geq 2,$$

der Beleuchtungsstärke  $E > 0$  hat die  $x_1$ -Achse zur Symmetrale und ist durch ihre Meridianschnitte

$$2E^2(x_1^2 + x_2^2)^d = x_1^2 + x_1|x_1|$$

in der  $x_1, x_2$ -Ebene, also in der abgeschlossenen 2-Halbebene  $x_1 \geq 0$  liegende Blätter Clairautscher Multiplikativen mit Index  $d - 1$ , bestimmt. ■

Der Meridianschnitt im Fall  $d = 4$ , eine Quartik  $m_3$ , ist in Abbildung 1 dargestellt.

## 3. Isophotische Elementvereine

In diesem Abschnitt sollen isophotische 1-Streifen  $(x(v_1), u(v_1))$  bezüglich der Zentralbeleuchtung  $(q, I(n)) = (o, 1)$  hergeleitet werden, deren Trägerkurven zu Kurven durch  $o$

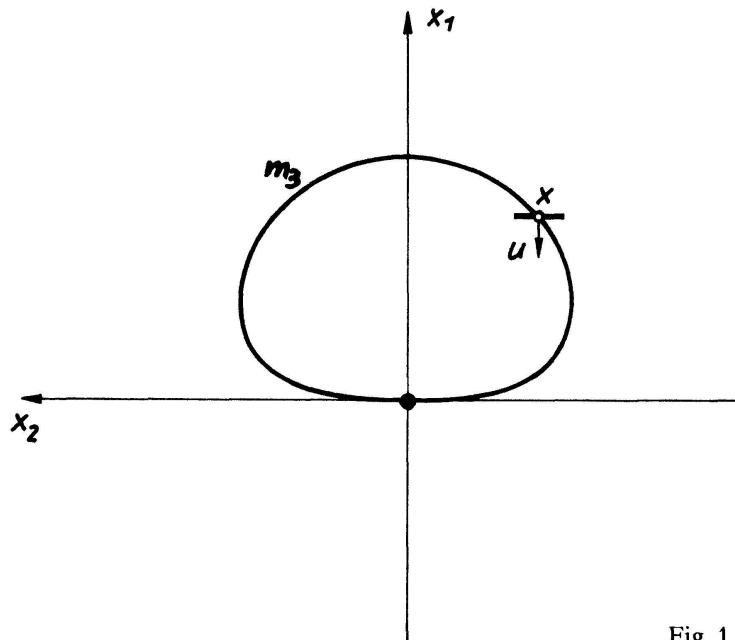


Fig. 1.

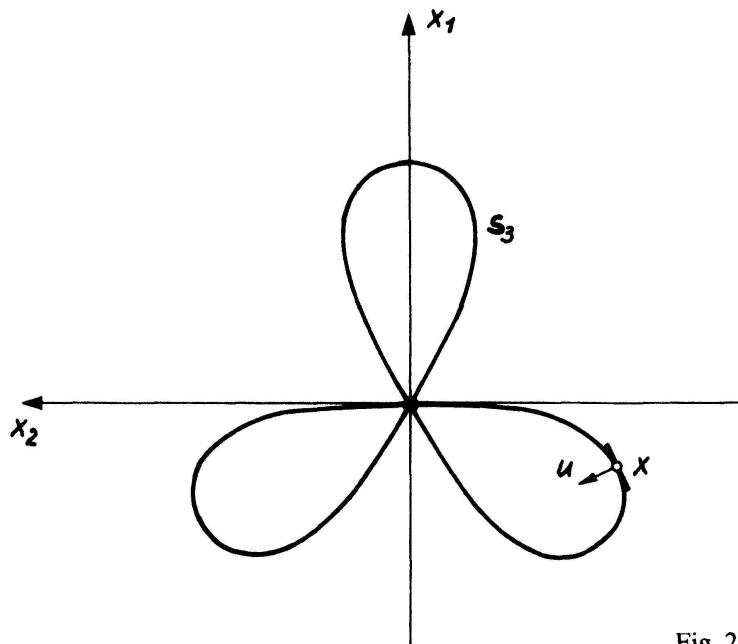


Fig. 2.

erweitert werden können und in einer 2-Ebene durch die Lichtquelle liegen. Die zugehörigen Stellungsvektoren  $u(v_1)$  werden parallel zu dieser 2-Ebene angenommen.

Demnach können wir uns auf die  $x_1, x_2$ -Ebene mit  $v_1 = \psi$  und variablem Einheitsvektor  $e = (\cos \psi, \sin \psi)$  beschränken. Sollen die gesuchten Trägerkurven in Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(\psi) = r(\psi) \cdot e(\psi), \quad \|\mathbf{x}\|^2 = r^2, \quad (5)$$

gegeben sein, dann sind Tangenten- und Normalenvektor von der Gestalt

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{r}e + r\dot{e} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\mathbf{x}}^\perp = \dot{r}\dot{e} - r\dot{e},$$

woraus unmittelbar  $\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 = \|\dot{\mathbf{x}}^\perp\|^2 = r^2 + \dot{r}^2$  folgt. Für alle  $\psi$  in (5) wird nun gemäss (1)

$$E = \frac{\langle -\mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle + |\langle -\mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle|}{2 \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{x}\|^d} = \text{const.}$$

angenommen. Dies führt auf

$$E^2 (r^2 + \dot{r}^2) r^{2d-4} = 1 \quad \text{und} \quad |\dot{r}| = \left| \frac{dr}{d\psi} \right| = \frac{1}{E r^{d-2}} \sqrt{1 - E^2 r^{2d-2}}. \quad (6)$$

Die Lösung der Differentialgleichung (6) liegt in ( $r = E^{\frac{1}{1-d}}$  oder)

$$(d-1)|\psi - \psi_0| = \arccos(E r^{d-1})$$

vor, was nach Umformung

$$\cos(d-1)(\psi - \psi_0) = E r^{d-1} \quad (7)$$

liefert.

Das ist die Polargleichung von regulären Äquipotentialkurven oder *Cassinoiden* mit Index  $d-1$  (bzw. mit  $d-1$  Brennpunkten) und Pol  $\mathbf{o}$ . M.a.W. sind gerade jene Punkte der  $x_1, x_2$ -Ebene durch (7) beschrieben, deren jeweilige Abstände von den  $d-1$  Ecken eines regulären, konvexen Polygons dieser Ebene ein Produkt ergeben, welches gleich der  $(d-1)$ -fachen Potenz der Radiuslänge des Polygonumkreises ist (siehe [7], S. 446). Mithin gilt

**Satz 2:** Ein 1-Streifen im  $\mathbf{R}^d$  der Gestalt

$$\{(\mathbf{x}(v_1), \mathbf{u}(v_1)) | x_i = u_i = 0 \text{ für } i = 3, \dots, d\}$$

mit konstanter Beleuchtungsstärke  $E > 0$  hat als Trägerkurve in der  $x_1, x_2$ -Ebene (entweder einen Kreis oder) eine Cassinoide vom Index  $d-1$  mit der auf die  $x_1$ -Achse bezogenen Polargleichung

$$\cos(d-1)(\psi - \psi_0) = E r^{d-1}. \quad \blacksquare$$

Für den Spezialfall  $d=3$  wurde dieser Zusammenhang bereits von Bohne [2] hergeleitet. Für  $d=4$  ist der Meridianschnitt, eine als *Kiepert-Kurve* bekannte Cassinoide, in Abbildung 2 dargestellt. Die wesentliche Bedeutung der beschriebenen isophotischen 1-Streifen mit den in (7) für frei wählbare Integrationskonstante  $(d-1)\psi_0$  gegebenen Trägerkurven und zu ihrer Träger-2-Ebene jeweils parallelen Stellungsvektoren besteht darin, dass aus Teilmengen von solchen Streifen (und einer Kugel mit Radius  $E^{\frac{1}{1-d}}$ ) durch geeignete Bewegungen mit Fixpunkt  $\mathbf{o}$  weitere isophotische Elementvereine im  $\mathbf{E}^d$ , z. B. glatte Drehflächen (vgl. [9]), erzeugt werden können. Dies sei jedoch dem Leser überlassen.

## LITERATUR

- 1 Bohne E.: Erzeugung isophotischer Streifen bei geometrischer Zentralbeleuchtung zweiter Art, wenn die Leitkurve eine Gerade ist. Beitr Algebra Geom. 13, 55–60 (1982).
- 2 Bohne E.: Spezielle ebene Kurven als Leitlinien isophotischer Zylinderstreifen. Beitr. Algebra Geom. 15, 91–95 (1983).
- 3 Bohne E., Geise, G.: Zur Begriffswelt der Beleuchtungsgeometrie. Beitr. Algebra Geom. 20, 117–122 (1985).
- 4 Caratheodory C.: Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung, Band 1. Teubner, Leipzig 1956.
- 5 de Jans C.: Les multiplicatrices de Clairaut. Gent 1912.
- 6 Lie S., Scheffers G.: Geometrie der Berührungsformationen, Band 1. Teubner, Leipzig 1896.
- 7 Loria G.: Spezielle algebraische und transzendentale ebene Kurven, Band 1. Teubner, Leipzig 1910.
- 8 Meyer E.: Beleuchtungstechnik. Vieweg, Braunschweig 1938.
- 9 Paukowitsch P.: Flächen konstanter Beleuchtungsstärke. Beitr. Algebra Geom. 26, 203–216 (1988).

© 1991 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/91/030073-06\$1.50 + 0.20/0

## On permutations involving pairs of twins

We are concerned with permutations of a set of  $2n$  elements coupled into  $n$  pairs; the members of each pair are referred to as *twins* (two decks of cards serve as a model). Let  $p(n, k)$  be the probability that, in a randomly chosen permutation of such a set, exactly  $k$  pairs of twins are nonseparated (occupy neighbouring positions). To be more precise: assume  $S = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n\}$  is the set, element  $a_i$  matching  $b_i$ ; define  $T(n, k)$  as the set of all maps  $\varphi$  of  $\{1, \dots, 2n\}$  onto  $S$  such that  $|\varphi^{-1}(a_i) - \varphi^{-1}(b_i)| = 1$  holds for exactly  $k$  values of  $i$  (permutations regarded as enumerations). Then

$$p(n, k) = \frac{1}{(2n)!} |T(n, k)| \quad (0 \leq k \leq n)$$

(here and in the sequel  $|\cdot|$  denotes the cardinality of a set). Evidently,

$$\sum_{k=0}^n p(n, k) = 1 \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots . \quad (1)$$

It is not hard to show (see below) that  $p(n, 0) < 1/2$ , for any  $n$  (this was one of the problems at the 30-th IMO in Germany, 1989, proposed by the author).

In this note we examine the asymptotic behaviour of quantities  $p(n, k)$  for growing  $n$ . Namely, we prove

### Proposition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(n, k) = \frac{1}{ek!} \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots .$$