

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **46 (1991)**

Heft 2

PDF erstellt am: **26.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Aufgaben

**Aufgabe 1028.** Man bestimme die Nullstellen der Polynome

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{2n-k}{2n-2k} 2^{2n-2k} (x-1)^k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hj. Stocker, Wädenswil

**Lösung.** Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\sin((2n+1)y)}{\sin y} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n-k}{k} (2 \cos y)^{2n-2k} \\ &= (\cos^2 y)^n P_n(1 - 1/\cos^2 y) \end{aligned}$$

erhält man

$$P_n(-\tan^2 y) = \frac{\sin((2n+1)y)}{\sin y \cos^{2n} y}.$$

Der Term der rechten Seite wird Null für  $y = \frac{r\pi}{2n+1}$ ,  $1 \leq r \leq 2n$ ; die gesuchten Nullstellen sind deshalb

$$x_r = -\tan^2 \frac{r\pi}{2n+1}, \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

M. Vowe, Therwil

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bolligen), P. Bundschuh (Köln, BRD), F. Götze (Jena, BRD), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), H. J. Seiffert (Berlin, BRD), R. Wyss (Flumenthal), K. Zacharias (Berlin, BRD).

**Aufgabe 1029.** Genau welche natürlichen Zahlen treten als Diagonallängen von (nicht ausgearteten) Quadern oder Rechtecken mit natürlichen Zahlen als Seitenlängen auf?

D. Laugwitz, Darmstadt, BRD

**Lösung.** Gesucht sind alle natürlichen Zahlen  $d$ , für die mindestens eine der beiden diophantischen Gleichungen

$$d^2 = x^2 + y^2 \tag{1}$$

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{2}$$

mit  $x, y, z \in \mathbb{N}$  lösbar ist. Hierzu beweisen wir folgende

### Behauptungen:

1. Für  $d=2^n$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$  sind (1) und (2) unlösbar.
2. Ist  $d$  durch eine Primzahl  $p \equiv 1 \pmod{4}$  teilbar, so ist (1) lösbar.
3. Ist  $d$  durch eine Primzahl  $q \equiv -1 \pmod{4}$  teilbar, so ist (2) lösbar.

**Beweis.** 1. Für  $n=0$  sind (1) und (2) unlösbar. Angenommen, es sei  $(2^n)^2 = x^2 + y^2$  mit  $n, x, y \in \mathbb{N}$ , und  $2^k$  die höchste in  $x$  und  $y$  aufgehende Potenz von 2. Division durch  $4^k$  liefert  $4^{n-k} = x'^2 + y'^2$  mit  $n > k$  und ungeraden  $x', y'$ . Übergang zur Kongruenz mod 4 ergibt einen Widerspruch. Entsprechend beweist man die Unlösbarkeit von (2).

2. Aus der Identität  $(m^2 + n^2)^2 = (2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2$  und aus dem Satz von Fermat, wonach jede Primzahl  $p \equiv 1 \pmod{4}$  eine Darstellung  $p = u^2 + v^2$  mit  $u, v \in \mathbb{N}$  und  $u > v$  besitzt, folgt die Existenz eines Rechtecks mit Diagonallänge  $p = u^2 + v^2$  und den Seitenlängen  $2uv$  und  $u^2 - v^2$ . Durch Multiplikation dieser drei Längen mit  $d/p$  folgt Behauptung 2.

3. Der Beweis ergibt sich aus der Identität  $(l^2 + m^2 + n^2)^2 = (2ln)^2 + (2mn)^2 + (l^2 + m^2 - n^2)^2$  sowie aus folgendem Satz (s. z.B. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie Bd. 1, S. 96/97): Für jede natürliche Zahl  $c$ , die nicht von der Form  $c = 4^a(8b + 7)$  mit  $a, b \in \mathbb{N}_0$  ist, gibt es eine Darstellung  $c = u^2 + v^2 + w^2$  mit  $u, v, w \in \mathbb{N}_0$ . Wählt man  $c = 2q$ , so gilt insbesondere  $u, v, w \in \mathbb{N}$ . Denn  $2q$  ist keine Quadratzahl, und wäre  $2q = u^2 + v^2$  mit  $u, v \in \mathbb{N}$ , so wären  $u$  und  $v$  ungerade und es folgte  $q = ((u+v)/2)^2 + ((u-v)/2)^2$ , was mod 4 einen Widerspruch ergibt. O.B.d.A. darf  $u \geq v \geq w$  angenommen werden. Somit gibt es einen Quader mit der Diagonallänge  $2q = u^2 + v^2 + w^2$  und den Seitenlängen  $2uw$ ,  $2vw$ ,  $u^2 + v^2 - w^2 = 2q - 2w^2$ . Division sämtlicher Längen durch 2 liefert einen Quader mit Diagonallänge  $q$  und Seitenlängen  $\in \mathbb{N}$ .

Wie unter 2. folgt durch Multiplikation mit  $d/q$  die Behauptung 3. Zusammengefasst hat sich somit ergeben:  $d \in \mathbb{N}$  ist genau dann Diagonale eines Quadrates oder Rechtecks mit Seitenlängen  $\in \mathbb{N}$ , wenn  $d$  keine Potenz von 2 ist.

O. Buggisch, Darmstadt, BRD

Weitere Lösungen sandten H. Guggenheimer (New York, USA), A. A. Jagers (Enschede, NL), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Hj. Stocker (Wädenswil).

**Aufgabe 1030.** Man zeige: Für jede natürliche Zahl  $n$  existiert eine Bijektion  $f: \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0$  derart, dass

$$f^n(x) = 1/x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_0.$$

Dabei sei  $\mathbb{R}_0 := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , und  $f^n$  bezeichne die  $n$ -te Iterierte von  $f$  (also  $f^1 := f$ ,  $f^k := f^{k-1} \circ f$  für  $k = 2, \dots, n$ ). Wie lässt sich  $f$  effektiv konstruieren?

J. Binz, Bollingen  
B. Schindler, Könitz

**Solution.** The following function  $f$  has the required properties:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 1 \\ x + 1 & \text{if } x > 1 \text{ and } n \text{ does not divide } [x] - 1 \\ \frac{1}{x - n + 1} & \text{if } x > 1 \text{ and } n \text{ divides } [x] - 1 \end{cases}$$

$$f(x) = 1/f(1/x) \quad \text{if } 0 < x < 1$$

$$f(x) = -f(-x) \quad \text{if } x < 0.$$

( $[x]$  = least integer  $\geq x$ ).

This function acts as follows

$$(1, 2] \rightarrow (2, 3] \rightarrow \dots \rightarrow (n, n + 1] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1) \rightarrow [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \rightarrow \dots \rightarrow \left[ \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) \rightarrow (1, 2],$$

$$(n + 1, n + 2] \rightarrow \dots \rightarrow (2n, 2n + 1] \xrightarrow{\text{n arrows}} \left[ \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1} \right) \xrightarrow{\text{n arrows}} \left[ \frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \right) \rightarrow (n + 1, n + 2],$$

and so on; arrows denote bijective maps between successive intervals. Every point  $x_0$  (say, in  $(1, 2]$ ) gives rise to its  $f$ -trajectory, which after  $n$  steps hits  $1/x_0$  and after  $2n$  steps closes; this follows from the defining formulas. So  $f^n(x) = 1/x$  on  $(0, \infty)$ , hence, by oddness, on  $(-\infty, 0)$  as well.  $\square$

This example is of course not unique, there are a lot ( $= 2^c$ ) of such functions. Since no special properties of  $f$  are required (other than merely set-theoretical), the general form of  $f$  can be described as follows.

Assume  $f^n(x) = 1/x$ . Then  $f^n(1) = 1$ , whence  $f(1) = f^{n+1}(1) = 1/f(1)$ , so  $f(1) \in \{-1, 1\}$ . Similarly,  $f(-1) \in \{-1, 1\}$ . If  $n$  is odd, then necessarily  $f(1) = 1, f(-1) = -1$ ; if  $n$  is even, then either  $f$  leaves  $1$  and  $-1$  as fixed-points or interchanges them.

The set  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$  splits into  $f$ -orbits, which are finite, as  $f^{2n}(x) = x$ . The length of each orbit (i.e. the least integer  $m > 0$  such that  $f^m(x) = x$  on that orbit) must divide  $2n$ , without dividing  $n$ . In other words,  $m = 2k$  where  $n \equiv k \pmod{2k}$ . Choosing any element  $x_0$  of the orbit, so that  $x_0 \mapsto x_1 \mapsto \dots \mapsto x_{2k} = x_0$ , we then must have  $x_{k+i} = 1/x_i$  for  $i = 0, \dots, k$ . No other restrictions are imposed by the conditions of the problem, and there is no interplay between various orbits.

Hence, the general  $f$  is obtained by partitioning  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$  arbitrarily into finite sets  $C_\alpha$  ( $\alpha$  belonging to some index set of power continuum) with the properties:

$$\forall \alpha: |C_\alpha| =: 2k_\alpha, \quad k_\alpha | n, \quad 2k_\alpha \nmid n;$$

$$\forall \alpha: (x \in C_\alpha \Rightarrow 1/x \in C_\alpha);$$

arranging each  $C_\alpha$  into a cycle  $(x_0, \dots, x_{2k_\alpha})$  whose «second half» is composed (consecutively) of the inverses of the elements in the «first half»; and of course defining  $f$  on  $C_\alpha$  as cyclic shift.

On  $\{-1, 1\}$ ,  $f$  must behave as described in a previous paragraph.

Every function  $f$  defined by a partition as above obviously is a bijection satisfying the condition  $f^n(x) = 1/x$  on  $\mathbb{R}_0$ .

M. E. Kuczma, Warschau, Polen

Weitere Lösungen sandten Con Amore Poblegruppe Kopenhagen (DK), M. Grawe (Köln, BRD), A. A. Jagers (Enschede, NL), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Chr. A. Meyer (Bern), J. Schaer (Alberta, CD), K., Schütte (München, BRD).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Oktober 1991* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

**Aufgabe 1046.** Es seien  $a$  und  $b$  reelle Zahlen sowie  $x_1, \dots, x_n$  positive reelle Zahlen mit

$$\sum_{i=1}^n x_i^{-b} \leq \frac{1}{n}.$$

Für die durch

$$g(r) := \left( \sum_{i=1}^n x_i^r \right) \left( \sum_{i=1}^n x_i^{-ar-b} \right); \quad r \in \mathbb{R}$$

definierte Funktion  $g$  zeige man, dass

$$g(r)g(s) \leq g(r+s) \quad \text{für alle } r, s \in \mathbb{R} \text{ mit } r \cdot s \geq 0.$$

H. Alzer, Johannesburg, Südafrika

**Aufgabe 1047.** Man beweise, dass für die Innenwinkel  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  eines ebenen Dreiecks die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^3 \cot(\alpha_i/2) - 3\sqrt{3} \leq 2 \left( \sum_{i=1}^3 (1/\alpha_i) - 9/\pi \right)$$

gilt, mit Gleichheit genau im gleichseitigen Fall.

P. Bundschuh, Köln, BRD

**Aufgabe 1048.** Ein Alphabet  $A$  bestehe aus  $k$  Konsonanten und  $v$  Vokalen. Ein Wort über  $A$  heisse regulär genau dann, wenn in ihm von je zwei benachbarten Buchstaben stets mindestens einer ein Konsonant ist. Wieviele  $n$ -stellige reguläre Wörter kann man mit den Buchstaben aus  $A$  bilden?

J. Binz, Bolligen

### Berichtigung zu Aufgabe 1045

Der erste Satz in der Aufgabenstellung muss wie folgt lauten:  $p = 4n + 3 \geq 7$  sei eine Primzahl.

## Literaturüberschau

S. Gottwald, H.-J. Ilgands, K.-H. Schlote (Hrsg.): Lexikon bedeutender Mathematiker. 504 Seiten, 8 Tafeln, DM 29,80. Bibliographisches Institut, Leipzig 1990.

Das vorliegende handliche Lexikon enthält etwa 1800 biographische Artikel über Mathematiker (und andere der Mathematik nahestehende Wissenschaftler) aller Epochen und Kulturkreise. Selbstverständlich sind die Grossen der Wissenschaft ihrer Bedeutung gemäss gewürdigt, aber – und das halte ich für ein besonderes Verdienst dieses Nachschlagewerkes – auch weniger Bekannte werden hier vorgestellt. Wer hat sich zum Beispiel angesichts des Satzes von Riemann-Roch nicht schon die Frage gestellt: „Wer war eigentlich Roch?“ Hier wird er eine Antwort finden!

Jeder Artikel enthält (soweit bekannt) die üblichen biographischen Daten und Angaben zu Ausbildung und Werdegang des entsprechenden Gelehrten, gefolgt von einer mehr oder weniger ausführlichen Darstellung seines wissenschaftlichen Werkes. Die Literaturhinweise beschränken sich meist auf Verweise auf andere biographische Werke sowie auf Nachrufe in mathematischen Zeitschriften.

Personen, deren Namen unter verschiedenen Schreibweisen bekannt sind, lassen sich dank zahlreicher Querverweise auffinden. Alles im allem: ein nützliches Nachschlagewerk zu einem günstigen Preis.

H. C. Im Hof

H. Meschkowski: Denkweisen grosser Mathematiker. Ein Weg zur Geschichte der Mathematik. X und 286 Seiten, DM 58,-. Vieweg, Braunschweig 1990.

Meschkowski hat eine stattliche Reihe höchst anregender und reizvoller Bücher für Lehrer und Liebhaber der Mathematik geschrieben. Dazu gehört auch eine 1961 erstmals erschienene kleine Einführung in die Geschichte der Mathematik von etwa 100 Seiten Umfang, mit der er den Versuch unternommen hat, 9 gewichtige Epochen je durch einen grossen Mathematiker und dessen Denk- und Arbeitsweise zu charakterisieren. Aufhänger dieser recht originellen Mathematik-Geschichte waren Pythagoras und seine Schule, Archimedes, Nikolaus von Cues, Pascal, Leibniz, Gauss, Boole, Weierstrass und Cantor (Besprochen in El. Math. Vol. 28, p. 120).

1967 ist das Bändchen in einer leichtüberarbeiteten 2. Auflage erschienen. Unter dem bisherigen Titel liegt jetzt eine nochmals überarbeitete und zugleich stark erweiterte 3. Auflage mit dem dreifachen Umfang der Erstauflage