

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 46 (1991)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Konvergenz von Teilen der harmonischen Reihe  
**Autor:** Stadje, W.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43269>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.05.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Moreover, this value of  $\varrho_n$  appears to be the greatest possible in the context of the generalized Main Theorem.

A. Bezdek, Cornell University, Ithaca and Hungarian Academy of Sciences, Budapest  
W. Kuperberg, Auburn University, Auburn

## REFERENCES

- 1 Bezdek A.: Remark on the closest packing of convex discs, *Studia Sci. Math. Hungar.* 15 (1980), 283–285.
- 2 Böröczky K.: Closest packing and loosest covering of the space with balls, *Studia Sci. Math. Hungar.* 21 (1986), 79–89.
- 3 Fejes Tóth L.: Remarks on the closest packing of convex discs, *Comment. Math. Helvet.* 53 (1978), 536–541.
- 4 Horváth J.: Über die Enge von Zylinderpackungen und die Lockerheit von Zylinderüberdeckungen im  $n$ -dimensionalen Euklidischen Raum. *Studia Sci. Math. Hungar.* 21 (1986), 219–255.
- 5 Rourke C. P., Sanderson B. J.: *Introduction to piecewise linear topology*, Springer Verlag 1982.

© 1991 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/91/02000-03 \$1.50 + 0.20/0

# Konvergenz von Teilen der harmonischen Reihe

## 1. Einleitung

Es seien  $M$  die Menge der natürlichen Zahlen, in deren Dezimaldarstellung keine «9» auftritt, und  $P$  die Menge der Primzahlen. Dann ist wohlbekannt, daß (i)  $\sum_{n \in M} n^{-1}$  konvergiert, wobei (ii)  $\sum_{n \in P} n^{-1}$  divergiert. Ergebnis (i) geht wohl auf Kempner (1914) zurück; einen einfachen Beweis, der die Abschätzung  $\sum_{n \in M} n^{-1} < 90$  liefert, findet man in Honsberger (1982), S. 89 ff. Irwin (1916) und Wadhwa (1975) geben untere und obere Schranken für die analoge Reihe an, die durch Weglassen aller eine «0» enthaltenden Terme entsteht. In dieser Arbeit wollen wir für eine ganze Klasse nach diesem Muster gebildeter Reihen eine einfache Abschätzung herleiten. Dieses Ergebnis werden wir dann anwenden, um zu zeigen, daß es für jedes  $k \geq 0$  eine Primzahl gibt, deren Dezimaldarstellung eine gegebene Ziffer (etwa «9») mehr als  $k$ -mal enthält, und um eine obere Schranke für die kleinste derartige Primzahl zu gewinnen.

## 2. Teilreihen von $\sum n^{-1}$

Im folgenden seien eine natürliche Zahl  $d \geq 2$ , ein  $j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$  und eine ganze Zahl  $k \geq 0$  fest gewählt. Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gibt es eine eindeutige  $d$ -adische Darstellung  $n = a_0 + a_1 d + a_2 d^2 + \dots$  mit  $a_0, a_1, \dots \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ . Die Koeffizienten  $a_i$  nennen wir die Ziffern von  $n$ . Sei nun  $M$  die Menge aller natürlichen Zahlen, in deren  $d$ -adischer Entwicklung die Ziffer  $j$  höchstens  $k$ -mal auftritt.

**Satz:** Es gilt

$$\sum_{n \in M} n^{-1} < d^{k+1}(1 + \ln(d^{k+1} - 1)) < d^{k+1}(1 + (k + 1)\ln d). \tag{1}$$

**Beweis:** Sei für beliebiges  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$

$$A_n = \{n d^{k+1}, n d^{k+1} + 1, \dots, (n + 1) d^{k+1} - 1\}. \tag{2}$$

Die Menge  $A_n$  besteht aus  $d^{k+1}$  aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen. Folglich existiert für jede beliebige Kombination  $a_0, \dots, a_k$  von  $k + 1$  Ziffern aus  $\{0, 1, \dots, d - 1\}$  ein Element aus  $A_n$  mit diesen Endziffern. Insbesondere gibt es eine Zahl aus  $A_n$ , die die Ziffer  $j$  an den letzten  $k + 1$  Stellen ihrer  $d$ -adischen Darstellung hat. Daher besitzt  $A_n \cap M$  höchstens  $d^{k+1} - 1$  Elemente. Für  $n \in \mathbb{N} \setminus M$  gilt  $A_n \cap M = \emptyset$ , denn jede Zahl aus  $A_n$  hat mindestens so viele Ziffern  $j$  wie  $n$ , falls  $n \geq 1$ .

Wir setzen

$$s_n = \sum_{i \in A_n \cap M} i^{-1}, \quad n \geq 0. \tag{3}$$

Dabei sei die leere Summe als 0 definiert. Für  $n \in M$  folgt offenbar

$$s_n \leq (d^{k+1} - 1)/n d^{k+1}. \tag{4}$$

Für beliebiges  $i \geq 2$  ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \in M \\ n < i d^{k+1}}} n^{-1} &= \sum_{l=0}^{i-1} \left( \sum_{n \in A_l \cap M} n^{-1} \right) = \sum_{n \in A_0 \cap M} ( ) + \sum_{l=1}^{i-1} ( ) \\ &< \sum_{n=1}^{d^{k+1}-1} n^{-1} + \sum_{\substack{1 \leq l < i \\ l: A_l \cap M \neq \emptyset}} s_l \\ &< 1 + \ln(d^{k+1} - 1) + \frac{d^{k+1} - 1}{d^{k+1}} \sum_{\substack{n \in M \\ n < i d^{k+1}}} n^{-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Dabei haben wir für die zweite Ungleichung die Beziehung  $2^{-1} + 3^{-1} + \dots + N^{-1} < \ln(N - 1)$  sowie (4) ausgenutzt. Aus (5) folgt

$$\sum_{\substack{n \in M \\ n < i d^{k+1}}} n^{-1} < d^{k+1}(1 + \ln(d^{k+1} - 1)). \tag{6}$$

Da (6) für jedes  $i \geq 2$  gilt, liefert der Grenzübergang  $i \rightarrow \infty$  die Behauptung.

**Beispiel:** Sei  $d = 10, j = 9$ . Für die harmonische Reihe ohne Brüche, die eine Ziffer «9» enthalten, ergibt der Satz die obere Schranke  $10(1 + \ln 9) = 31,97 \dots$ . Lässt man nur die

Brüche weg, die mindestens zweimal die Ziffer «9» enthalten, so ist die entstehende Reihe kleiner als  $100(1 + \ln 99) < 5596$ .

**Korollar:** Die Teilmenge  $P$  von  $\mathbb{N}$  habe die Eigenschaft

$$\sum_{n \in P} n^{-1} = \infty .$$

Dann gibt es eine Zahl  $p_0 \in P$ , deren  $d$ -adische Darstellung mindestens  $(k + 1)$ -mal die Ziffer  $j$  enthält und für die

$$f(p_0) := \sum_{\substack{n \in P \\ n < p_0}} n^{-1} \leq d^{k+1} (1 + (k + 1) \ln d) \tag{7}$$

gilt.

**Beweis:** Da  $P$  nicht in  $M$  enthalten sein kann, gibt es ein  $p_0 \in P$ , das  $(k + 1)$ -mal die Ziffer  $j$  enthält. Sei  $p_0$  mit dieser Eigenschaft minimal gewählt. Es folgt:

$$\sum_{\substack{n \in P \\ n < p_0}} n^{-1} \leq \sum_{\substack{n \in M \\ n < p_0}} n^{-1} < d^{k+1} (1 + (k + 1) \ln d).$$

Die Abschätzung (7) gilt für jede Ziffer  $j \in \{0, 1, \dots, d - 1\}$ . Somit enthält die Menge  $\{p \in P \mid f(p) < d^{k+1} (1 + (k + 1) \ln d)\}$  für jede Ziffer  $j \in \{0, 1, \dots, d - 1\}$  eine Zahl, in deren  $d$ -adischer Darstellung  $j$  mindestens  $(k + 1)$ -mal auftritt.

Die Abschätzung (7) ist oft zur Bestimmung einer oberen Schranke für  $p_0$  nützlich. Falls zum Beispiel  $P$  die Menge der Primzahlen ist, kennt man das Verhalten von  $f(p)$  für große Werte von  $p$ . Im allgemeinen kann man  $f(p)$  mit Hilfe der oft leichter zugänglichen Funktion

$$\pi(n) = \text{Anzahl der } i \in P \text{ mit } i \leq n$$

nach unten abschätzen. Man setze nämlich  $I_n = 1$  für  $n \in P$  und  $I_n = 0$  sonst. Dann ist  $\pi(n) = I_1 + \dots + I_n$  und

$$\begin{aligned} f(2^i) &= \sum_{n=1}^{2^i} I_n/n = 2^{-i} \pi(2^i) + \sum_{n=1}^{2^i-1} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \pi(n) \\ &= \sum_{v=1}^{i-1} \sum_{n=2^v}^{2^{v+1}-1} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \pi(n) \\ &> \sum_{v=1}^{i-1} \pi(2^v) (2^{-v} - 2^{-v-1}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{i-1} 2^{-v} \pi(2^v). \end{aligned} \tag{8}$$

Insbesondere folgt

$$f(p_0) \geq f(2^{\lfloor \log_2 p_0 \rfloor}) > \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{\lfloor \log_2 p_0 \rfloor - 1} 2^{-v} \pi(2^v). \quad (9)$$

Somit ergibt sich für  $p_0$  die Beziehung

$$\sum_{v=1}^{\lfloor \log_2 p_0 \rfloor - 1} 2^{-v} \pi(2^v) < 2 d^{k+1} (1 + (k+1) \ln d). \quad (10)$$

### 3. Primzahlen mit vielen Neunen

Sei nun  $P$  die Menge der Primzahlen. Dann gilt bekanntlich

$$f(p_0) = \sum_{\substack{p \in P \\ n < p_0}} p^{-1} = \ln(\ln p_0) + a + O(e^{-c(\ln p_0)^{1/2}}) \quad \text{für } p_0 \rightarrow \infty \quad (11)$$

(Prachar (1957), S. 80). In (11) ist  $c$  eine positive Konstante und

$$a = \gamma - \sum_{p \in P} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m p^m} > 0, \quad (12)$$

wobei  $\gamma$  die Eulersche Konstante ist. Nach dem Korollar gibt es für beliebiges  $k \geq 0$  und  $j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$  eine Primzahl  $p_0$ , in deren  $d$ -adischer Entwicklung die Ziffer  $j$  mindestens  $(k+1)$ -mal vorkommt. Für hinreichend großes  $k$  gilt  $f(p_0) > \ln(\ln p_0)$ , so daß nach (7)

$$p_0 < \exp(d^{(k+1)d^{k+1}} \exp(d^{k+1})) \quad (13)$$

folgt. Die obere Schranke in (12) ist recht groß; für  $d = 10$  und  $k = 9$  ist sie z. B. gleich

$$10^{10(10 + \ln 10)10^{10} \ln 10},$$

also eine Zahl mit (in Dezimalschreibweise) mindestens  $2,303 \cdot 10^{1,2303 \cdot 10^{11}}$  Ziffern.

W. Stadje, Universität Osnabrück

#### LITERATUR

- 1 Honsberger R.: Mathematische Juwelen. Vieweg-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1982.
- 2 Irwin F.: A curious convergent series. Amer. Math. Monthly 23, 149 (1916).
- 3 Kempner A. J.: A curious convergent series. Amer. Math. Monthly 21, 48 (1914).
- 4 Prachar K.: Primzahlverteilung. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1957.
- 5 Wadhwa A. D.: An interesting subseries of the harmonic series. Amer. Math. Monthly 82, 931 (1975).