

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 46 (1991)
Heft: 2

Artikel: Über Dreiecks-Partitionen. 2. Teil
Autor: Jeger, M.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-43267>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 08.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ueber Dreiecks-Partitionen

(2. Teil)

6. Äquivalenz-Sätze im Umfeld der Dreiecks-Partitionen

In der Kombinatorik sind zahlreiche Äquivalenz-Sätze über Mengen aus verschiedenartigen Partitionen bekannt (vgl. etwa [1], [2], [6]). Häufig können derartige Äquivalenz-Aussagen auch auf ganz elementarem Wege gewonnen werden. Als Schlüsselfigur dient dabei meist der sogenannte *Partitions-Graph*.

Bei der Konstruktion von Partitions-Graphen geht man davon aus, dass eine bestimmte Partition der Zahl n in der Form

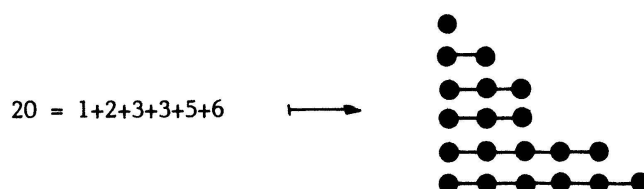
$$n = s_1 + s_2 + \dots + s_r; \quad s_i \in \mathbb{N}$$

mit

$$s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_r$$

notiert wird. Zur Veranschaulichung dieser Zerfällungsfigur ordnet man jedem Summanden s_i eine Knoten-Kette von entsprechender Länge zu und zeichnet dann die erhaltenen Ketten linksbündig übereinandergelegt auf.

Beispiel:



Figur 6.1.

Wegen $s_i \leq s_{i+1}$ treten am rechten Rand des Graphen keine Einbuchtungen auf, d. h. es entsteht eine *Treppe*.

Partitions-Graphen scheint N. M. Ferrers erstmals in Beweisführungen verwendet zu haben; zu einem nützlichen Instrument der Kombinatorik hat sie aber erst J. J. Sylvester (1814 – 1897) entwickelt.

Auch bei den Dreiecks-Partitionen können durch die Verwendung von Partitions-Graphen interessante Zusammenhänge direkt einsichtig gemacht werden. An den Anfang der folgenden Ueberlegungen stellen wir die Äquivalenzen

$$s_1 + s_2 + s_3 = n \quad \Leftrightarrow \quad (s_1 - 1) + (s_2 - 1) + (s_3 - 1) = n - 3$$

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \quad \Leftrightarrow \quad (s_1 - 1) \leq (s_2 - 1) \leq (s_3 - 1)$$

$$s_3 < s_1 + s_2 \quad \Leftrightarrow \quad (s_3 - 1) \leq (s_1 - 1) + (s_2 - 1).$$

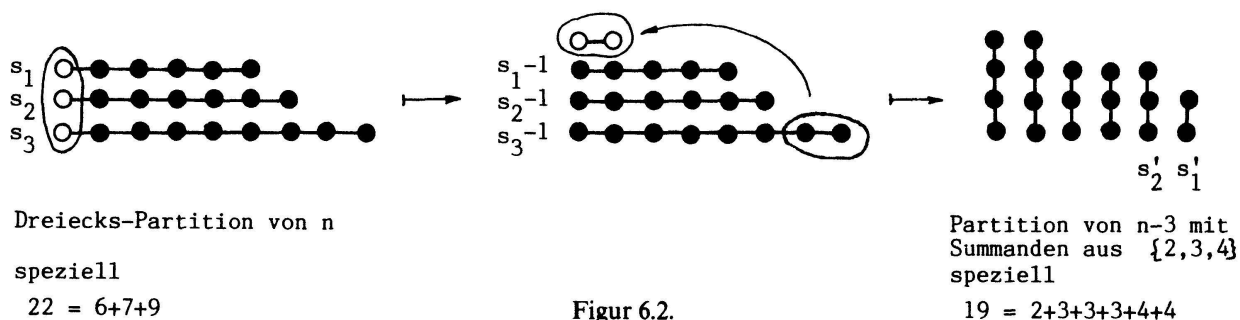
Die rechte Seite der letzten Äquivalenz kann nun auch in der Form

$$(s_3 - 1) - (s_2 - 1) \leq (s_1 - 1) \quad (6,1)$$

geschrieben werden. Dies beinhaltet, dass im Partitions-Graphen zur Zerfällung

$$(s_1 - 1) + (s_2 - 1) + (s_3 - 1) = n - 3$$

der Überhang in der letzten Kette höchstens so lang ist, wie die erste Kette. Beim Verlegen dieses Überhangs über die erste Kette entsteht daher wiederum ein Partitions-Graph. Beispiel:



Der neue Graph (mittlerer Teil in Fig. 6.2) kann nun auch vertikal geschichtet werden. Dem entspricht eine Uminterpretation der zugehörigen Partition zur Zahl $n - 3$ zu einer solchen mit lauter Summanden aus der Menge $\{2, 3, 4\}$. Da der beschriebene Umbau-Prozess umkehrbar und damit die daraus hervorgehende Abbildung α_n bijektiv ist, hat man gleichzeitig den folgenden Äquivalenz-Satz bewiesen.

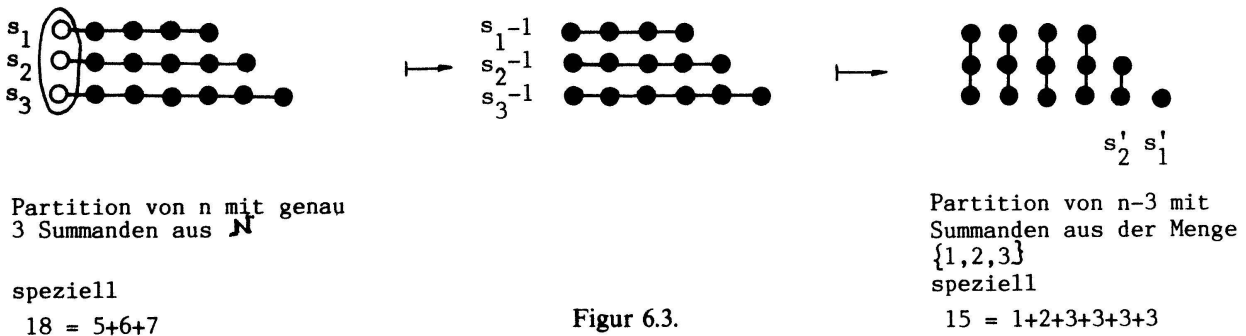
Satz: Es gibt gleichviele Dreiecks-Partitionen zur Zahl n , wie Partitionen zur Zahl $n-3$ über der Referenz-Menge $\{2, 3, 4\}$.

Dieser Äquivalenz-Satz gestattet nun, die Dreiecks-Partitionen auch mit dem in [5] vorgestellten generellen Abzähl-Algorithmus für Partitionen über irgend einer vorgegebenen Referenz-Menge abzuzählen. Vermöge der Abbildung α_n ist es auch möglich, die Dreiecks-Partitionen vom Index n aus den Partitionen vom Index $n-3$ über der Referenz-Menge $\{2, 3, 4\}$ zu konstruieren. Ein Algorithmus zur Auflistung von Partitionen über einer beliebigen Referenz-Menge ist ebenfalls in [5] beschrieben.

Mit ähnlichen Überlegungen können noch zwei weitere Äquivalenz-Sätze aus dem unmittelbaren Umfeld der Dreiecks-Partitionen erhalten werden.

Satz: Es gibt gleichviele Partitionen der Zahl n mit genau 3 Summanden aus \mathbb{N} , wie Partitionen beliebiger Länge der Zahl $n-3$ über der Referenz-Menge $\{1, 2, 3\}$.

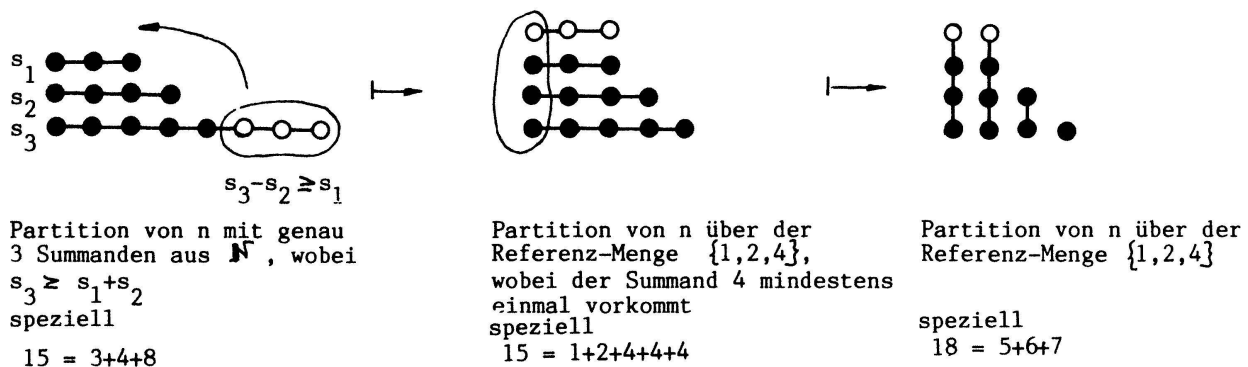
Die Partitionen von n mit genau 3 Summanden aus \mathbb{N} werden in der Fig. 2.1 durch die Gitterpunkte im gefärbten Bereich repräsentiert; im Vergleich mit den Dreiecks-Partitionen vom Index n wird also jetzt die Dreiecks-Ungleichung $s_3 < s_1 + s_2$ fallen gelassen. Der Beweis der neuen Äquivalenz-Aussage ist in der Fig. 6.3 enthalten.



Satz: Es gibt gleichviele Partitionen der Zahl n mit genau 3 Summanden aus \mathbb{N} mit $s_3 \geq s_1 + s_2$, wie Partitionen der Zahl $n-4$ über der Referenz-Menge $\{1, 2, 4\}$.

Hier werden also die Partitionen von n mit genau 3 Summanden betrachtet, welche die Dreiecks-Ungleichung nicht erfüllen.

Der zuletzt-ausgesprochene Äquivalenz-Satz wird durch die Fig. 6.4 bewiesen.



Wegen $s_3 \geq s_1 + s_2$ überragt im Primär-Graphen der Ueberhang in der letzten Kette die Länge der ersten Kette. Man kann daher von der untersten Kette stets eine Teilkette der Länge s_1 abschneiden und diese über die erste Kette verlegen. Der Überhang von n zu $n-4$ beim zweiten Umbau-Schritt ist erforderlich, wenn man von der Forderung freikommen will, dass der Summand 4 immer mindestens einmal vorkommen muss.

Es sei dem Leser überlassen, zu den vorgestellten Äquivalenz-Sätzen Paare von korrespondierenden Figuren-Mengen zu konstruieren.

7. Ausblick

Im Anschluss an unsere elementare Herleitung einer Anzahl-Formel für die Dreiecks-Partitionen sei noch kurz gezeigt, wie versierte Kombinatoriker dieses Problem angehen. Sie ziehen dazu formale Potenzreihen [1*] heran, die in der abzählenden Kombinatorik als äusserst griffiges Werkzeug bekannt sind.

Im *Integritätsbereich der formalen Potenzreihen* mit Koeffizienten aus \mathbb{C} gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} &= (1+x^2+x^4+\dots)(1+x^3+x^6+\dots)(1+x^4+x^8+\dots) \\ &= \left(\sum_{j_2=0}^{\infty} x^{2j_2} \right) \left(\sum_{j_3=0}^{\infty} x^{3j_3} \right) \left(\sum_{j_4=0}^{\infty} x^{4j_4} \right) \\ &= \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{j_3=0}^{\infty} \sum_{j_4=0}^{\infty} x^{2j_2+3j_3+4j_4} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) x^n \end{aligned} \quad (7,1)$$

Der Koeffizient $f(n)$ zeigt an, wie oft der Exponent $2j_2 + 3j_3 + 4j_4$ in der Dreifach-Summe den Wert n annimmt, d.h. $f(n)$ ist die Anzahl der Lösungen von

$$2j_2 + 3j_3 + 4j_4 = n \quad (7,2)$$

in nicht-negativen ganzen Zahlen j_2, j_3, j_4 . Eine Lösung von (7,2) repräsentiert aber zugleich eine Partition der Zahl n mit Summanden aus der Referenz-Menge $\{2, 3, 4\}$, nämlich

$$\underbrace{2+2+\dots+2}_{j_2 \text{ Summanden}} + \underbrace{3+3+\dots+3}_{j_3 \text{ Summanden}} + \underbrace{4+4+\dots+4}_{j_4 \text{ Summanden}} = n \quad (7,3)$$

Aufgrund des ersten Äquivalenz-Satzes von Abschnitt 6 gilt daher für die Anzahl-Folge bei den Dreiecks-Partitionen

$$\sum_{n=0}^{\infty} d(n) x^n = \frac{x^3}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}. \quad (7,4)$$

Man nennt dies die *abzählende Potenzreihe* für die Figuren-Menge der Dreiecks-Partitionen bei der üblichen Indizierung durch die jeweils zerfallte Zahl n [2*]. Die Koeffizienten $d(n)$ lassen sich hieraus über die *Partialbruch-Zerlegung* der rechten Seite erhalten, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{1}{(1-ax)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+s-1}{s-1} (ax)^n \quad \text{für } a \in \mathbb{C}, a \neq 0, s \in \mathbb{N} \quad (7,5)$$

ist. (7,5) lässt sich etwa unter Abstützung auf die leicht verifizierbare Beziehung

$$(1-ax)(1+ax+a^2x^2+\dots) = (1-ax) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \binom{j}{0} a^j x^j \right) = 1 \quad (7,6)$$

durch vollständige Induktion nach s beweisen.

Nähere Einzelheiten zur Handhabung der formalen Potenzreihen in der abzählenden Kombinatorik findet der Leser in [4] (Abschnitt 2), [8] und [9].

Die vollständige Partialbruch-Zerlegung des hier massgebenden Quotienten ist erst im Integritätsbereich der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten aus \mathbb{C} möglich. Aus die-

sem Grunde wurde bei der Formel (7,5) bereits darauf hingewiesen, dass deren Gültigkeitsbereich über reelle a -Werte hinausreicht.

Die Partialbruch-Zerlegung von (7,4) lautet

$$\begin{aligned} & \frac{x^3}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} \\ &= \frac{1}{24} \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{13}{288} \frac{1}{(1-x)} - \frac{1}{16} \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{32} \frac{1}{(1+x)} \\ &+ \frac{1}{9} \left(\frac{1}{1-\omega x} + \frac{1}{1-\omega^2 x} \right) + \frac{1}{16} \left((1+i) \frac{1}{1+ix} + (1-i) \frac{1}{1-ix} \right) \end{aligned} \quad (7,7)$$

mit

$$\omega = e^{i(2\pi/3)} \quad (3. \text{ Einheitswurzel}).$$

Unter Verwendung von (7,5) ergibt sich daraus die Anzahl-Formel

$$\begin{aligned} d(n) = & \frac{1}{24} \binom{n+2}{2} - \frac{13}{288} - \frac{1}{16} \binom{n+1}{1} (-1)^n - \frac{1}{32} (-1)^n + \frac{1}{9} \underbrace{(\omega^n + \omega^{2n})}_{\Omega_3(n)} \\ & - \frac{1}{16} \underbrace{((1+i)(-i)^n + (1-i)i^n)}_{\Omega_4(n)} \end{aligned} \quad (7,8)$$

wobei

$$\Omega_3(n) = \begin{cases} 2 & \text{für } n \equiv 0 \\ -1 & \text{für } n \equiv 1 \\ -1 & \text{für } n \equiv 2 \end{cases} \pmod{3}, \quad \Omega_4(n) = \begin{cases} 2 & \text{für } n \equiv 0 \\ 2 & \text{für } n \equiv 1 \\ -2 & \text{für } n \equiv 2 \\ -2 & \text{für } n \equiv 3 \end{cases} \pmod{4}$$

Die beiden Terme $\Omega_3(n)$ und $\Omega_4(n)$ repräsentieren periodische Funktionen von n mit den Perioden 3 und 4.

Die Anzahl-Formel kann schliesslich noch auf die folgende Gestalt gebracht werden:

$$d(n) = \frac{1}{288} (6n^2 + 18n - 1 - 9(-1)^n(2n+3) + 32\Omega_3(n) - 18\Omega_4(n)). \quad (7,9)$$

Es sei auch hier dem Leser überlassen, über (7,9) die auf elementarem Wege gewonnene Kurz-Formel (4,6) zu bestätigen.

Wir schliessen mit zwei Bemerkungen:

1. Eine erste Überlegung möge noch eine Verbindung zum früheren Abschnitt 5 herstellen. Die drei dort durch Umbau von Partitions-Graphen hergeleiteten Äquivalenzaussagen stehen in einer gewissen verwandtschaftlichen Beziehung zueinander. Dieser

Zusammenhang kann jetzt durch folgende Identität zwischen formalen Potenzreihen zum Ausdruck gebracht werden:

$$\frac{x^3}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} + \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)} = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

abzählende Potenzreihe der Dreiecks-Partitionen $s_1 + s_2 > s_3$	abzählende Potenzreihe der Partitionen mit genau 3 Summanden aus \mathbf{N} , für die $s_1 + s_2 \leq s_3$ gilt	abzählende Potenzreihe der Partitionen mit genau 3 Summanden aus \mathbf{N}
---	---	---

2. Eine weitere Rekursionsformel für die Partitions-Zahlen $d(n)$.
Aus (7,4) liest man ab, dass

$$(1 - x^2 - x^3 - x^4 + x^5 + x^6 + x^7 - x^9) \left(\sum_{n=0}^{\infty} d(n) x^n \right) = x^3 \quad (7,10)$$

ist. Daraus folgt durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} -d(0) &= 0 \\ d(1) &= 0 \\ -d(0) + d(2) &= 0 \\ -d(0) - d(1) + d(3) &= 1 \\ -d(0) - d(1) - d(2) + d(4) &= 0 \\ d(0) - d(1) - d(2) - d(3) + d(5) &= 0 \\ d(0) + d(1) - d(2) - d(3) - d(4) + d(6) &= 0 \\ d(0) + d(1) + d(2) - d(3) - d(4) - d(5) + d(7) &= 0 \\ d(1) + d(2) + d(3) - d(4) - d(5) - d(6) + d(8) &= 0 \end{aligned} \quad (7,11)$$

und für $n \geq 9$

$$-d(n-9) + d(n-7) + d(n-6) + d(n-5) - d(n-4) - d(n-3) - d(n-2) + d(n) = 0 \quad (7,12)$$

(7,12) beinhaltet eine lineare *homogene* Rekursionsformel für unsere Anzahl-Folge, was in der folgenden Schreibweise noch etwas deutlicher zum Ausdruck kommt:

$$d(n) = d(n-2) + d(n-3) + d(n-4) - d(n-5) - d(n-6) - d(n-7) + d(n-9) . \quad (7,13)$$

Die Anfangswerte

$$\begin{aligned} d(0) &= 0, & d(1) &= 0, & d(2) &= 0, & d(3) &= 1, & d(4) &= 0, \\ d(5) &= 1, & d(6) &= 1, & d(7) &= 2, & d(8) &= 1 \end{aligned}$$

können aus den Gleichungen (7,11) errechnet werden.

An den Partitionszahlen $d(n)$ bestätigt sich hier ein in der abzählenden Kombinatorik wohl bekannter Sachverhalt, dass nämlich für eine Anzahl-Folge immer dann eine generelle lineare homogene Rekursionsformel gefunden werden kann, wenn die abzählende Potenzreihe der betreffenden Figuren-Menge Quotient zweier Polynome ist und zugleich das Zähler-Polynom einen kleineren Grad aufweist, als das Nenner-Polynom [3*]. Diese Fakten kennzeichnen eine sog. *lineare Schieberegister-Folge*; das erwähnte Nenner-Polynom ist das *Rückkopplungs-Polynom des Schieberegisters* [4*]. Insbesondere erfolgt beim vorliegenden Beispiel mit jedem Iterationsschritt eine 9-Tupel-Verschiebung

$$(d(n-1), d(n-2), \dots, d(n-9)) \mapsto (\underline{d(n)}, d(n-1), \dots, d(n-8)),$$

wobei das jeweils neu hinzutretende Glied $d(n)$ durch die Rekursionsformel (7,13)

$$d(n) = R(d(n-1), d(n-2), \dots, d(n-9))$$

gegeben ist.

M. Jeger, ETH Zürich

LITERATUR

- 1 Comtet L.: Advanced Combinatorics. Dordrecht, Boston 1974.
- 2 Halder H., Heise W.: Einführung in die Kombinatorik. München 1976.
- 3 Hall M. jr.: Combinatorial Theory. Waltham 1967.
- 4 Jeger M.: Einführung in die Kombinatorik. Bd. 2, Stuttgart 1976.
- 5 Jeger M.: Kombinatorik mit dem Computer: Partitionen und Frankaturen. El. Math. 42, 156–172 (1987).
- 6 Liu C. L.: Introduction to Combinatorial Mathematics. New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, London, Sydney, 1898.
- 7 Lüneburg H.: Galoisfelder, Kreisteilungskörper und Schieberegisterfolgen. Mannheim, Wien, Zürich, 1979.
- 8 Ness W.: Proben aus der elementaren additiven Zahlentheorie. Schriftenreihe der Mathematik, Heft 9, Frankfurt, Hamburg, 1961.
- 9 Niven I.: Formal power series. Am. Math. Monthly 76, 871–889 (1969).

ANMERKUNGEN

- [1*] Die Arbeit mit Potenzreihen in der abzählenden Kombinatorik bringt es mit sich, dass man sich eigentlich ständig mit Konvergenzfragen auseinanderzusetzen hätte. Selbst Euler tat dies aber nicht, wohl in der Gewissheit, dass sich diesbezüglich alles in Ordnung bringen liesse. In den letzten Jahrzehnten haben sich Mathematiker immer wieder die Frage gestellt, ob denn diese Konvergenzprobleme überhaupt mitgeschleppt werden müssen. Eingehende Untersuchungen haben gezeigt, dass dies nicht erforderlich ist. In der Theorie der Potenzreihen steckt nämlich ein *algebraischer Kern*, der bei den meisten Anwendungen in der abzählenden Kombinatorik nicht überschritten wird; man kann also dort bei der Handhabung von Potenzreihen auf die topologische Komponente ganz verzichten. Stützt man sich auf dieses von H. Rademacher (1892–1969) initiierte Konzept, dann spricht man von *formalen Potenzreihen*.
- [2*] Je nach dem vorliegenden Abzählproblem sind bei Partitionen auch andere Indizierungen erforderlich, insbesondere auch mehrstufige. Letztere führen auf abzählende formale Potenzreihen in mehreren Unbestimmten.
- [3*] Vgl. [3] und [4], p. 48–59.
- [4*] Vgl. [7], p. 99–106.