

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 46 (1991)
Heft: 1

Artikel: Über Dreiecks-Partitionen. 1. Teil
Autor: Jeger, M.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-43264>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 08.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Vol. 46

Nr. 1

Seiten 1–32

Basel, Januar 1991

Ueber Dreiecks-Partitionen

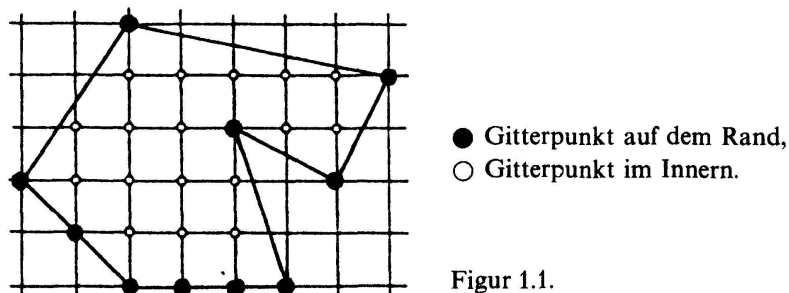
(1. Teil)

1. Vorbemerkungen

Mit der folgenden Untersuchung hat sich der Autor zum Ziele gesetzt, Material für den Mathematik-Unterricht bereitzustellen, das auszugsweise oder auch als ganzes Paket zur Pflege heuristischer Aktivitäten genutzt werden kann. Zugleich möchte dieser Streifzug durch die exemplarische Elementar-Mathematik in überschauender Manier auch über einige elementare und professionelle Verfahren in der abzählenden Kombinatorik informieren.

Als wesentliches Werkzeug wird dabei die sog. *Formel von Pick* [1*] für den Flächeninhalt ebener einfacher Polygon-Bereiche auf einem Quadrat-Gitter benutzt. Diese Formel sei daher zuvor kurz vorgestellt.

Ein ebener Polygon-Bereich heisst einfach, wenn er topologisches Bild einer Kreisscheibe ist. Sind sämtliche Eckpunkte eines solchen Polygon-Bereiches zugleich Gitterpunkte eines vorgegebenen Quadrat-Gitters, dann spricht man von einem einfachen *Polygon-Bereich auf dem betreffenden Quadrat-Gitter*.



Figur 1.1.

Zu jedem Polygon-Bereich \mathbb{P} auf einem Quadrat-Gitter gehören zwei charakteristische Zahlen, nämlich

- die Anzahl r der Gitterpunkte auf dem Rand von \mathbb{P} ,
- die Anzahl i der Gitterpunkte im Innern von \mathbb{P} .

Zur Zahl r können auch Gitterpunkte beitragen, die nicht Eckpunkte von \mathbb{P} sind. Die Formel von Pick besagt nun, dass zwischen dem Flächeninhalt $f(\mathbb{P})$ und den kombinatorischen Parametern r, i der folgende einfache Zusammenhang besteht:

$$f(\mathbb{P}) = i + \frac{r}{2} - 1. \quad [2*] \tag{1,1}$$

Für die Herleitung von (1,1) sei der Leser auf [1] (p. 253–254), [2] (Bd. 1, p. 191–197) und [3] verwiesen.

2. Dreiecks-Partitionen

Wir machen uns nun zu einer Entdeckungsreise auf, an deren Anfang eine konkrete Aufgabe aus der Kombinatorik steht.

Aufgabe: n sei eine natürliche Zahl und ID_n bezeichne die Menge der inkongruenten Dreiecke mit ganzzahligen Seiten vom Umfang n .

- Man bestimme die **Mächtigkeit** d_n der Menge ID_n und diskutiere die Anzahl-Folge $\{d\}$;
- Man entwickle einen Algorithmus zur **Auflistung** der Menge ID_n .

Sind s_1, s_2, s_3 die Seiten-Masszahlen eines Dreiecks aus ID_n , dann gilt

$$s_1 + s_2 + s_3 = n \quad (2,1)$$

$$1 \leq s_1 \leq s_2 \leq s_3 \quad (2,2)$$

$$s_1 + s_2 > s_3 \quad (2,3)$$

wobei

$$s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{N}. \quad (2,4)$$

Durch eine geeignete Seitenbezeichnung kann immer erreicht werden, dass (2,2) erfüllt ist. (2,3) ist die *Dreiecks-Ungleichung* mit der ausgezeichneten Seite s_3 . Wegen (2,2) bestehen die Implikationen

$$\begin{aligned} s_3 \geq s_2 &\Rightarrow s_1 + s_3 \geq s_1 + s_2 > s_2, \quad \text{d. h.} \quad s_1 + s_3 > s_2 \\ s_2 + s_3 > s_2 &\geq s_1, \quad \text{d. h.} \quad s_2 + s_3 > s_1. \end{aligned}$$

Die beiden anderen Dreiecks-Ungleichungen sind also automatisch erfüllt.

Man kann (2,1) zusammen mit (2,4) auch als *Diophantische Gleichung* in den Unbestimmten s_1, s_2, s_3 interpretieren, wobei (2,2) und (2,3) Nebenbedingungen darstellen. Die Beziehung (2,2) schliesst aus, dass eine bestimmte Dreiecksform in verschiedene Lösungen eingeht. Jede Lösung dieses Diophantischen Problems definiert demnach genau eine Figur aus ID_n .

Ganzzahlige additive Zerfällungen einer natürlichen Zahl n ohne Berücksichtigung der Summanden-Reihenfolge werden in der Kombinatorik als *Partitionen* bezeichnet. Solche Zerlegungen kann man stets so normieren, dass die einzelnen Summanden im Sinne nichtabnehmender Werte angeordnet werden. Man kann daher die Lösungen unseres Diophantischen Problems mit bestimmten *Partitionen der Zahl n aus 3 Summanden* identifizieren. Diese speziellen Zerfällungen werden aus naheliegenden Gründen *Dreiecks-Partitionen* genannt.

Für die weitere Analyse des aufgeworfenen Problemkreises sollen jetzt die Dreiecks-Partitionen in den Vordergrund gerückt werden. \mathbb{F}_n bezeichne fortan die Menge der Dreiecks-Partitionen vom Index n .

\mathbb{F}_{25} besteht beispielsweise aus den Figuren

1 + 12 + 12	3 + 11 + 11	5 + 8 + 12	6 + 7 + 12	7 + 7 + 11	8 + 8 + 9
2 + 11 + 12	4 + 9 + 12	5 + 9 + 11	6 + 8 + 11	7 + 8 + 10	
3 + 10 + 12	4 + 10 + 11	5 + 10 + 10	6 + 9 + 10	7 + 9 + 9	

und jede dieser Partitionen beschreibt eine Kongruenz-Klasse von ganzseitigen Dreiecken mit dem Umfang 25; es ist also $d(25) = 16$.

Um die Figuren-Menge \mathbb{F}_n besser erfassen zu können, führen wir eine geeignete Parametrisierung ein. Wählt man etwa s_1 und s_2 als Parameter, dann schliesst man aus

$$s_3 = n - (s_1 + s_2) \quad (2,5)$$

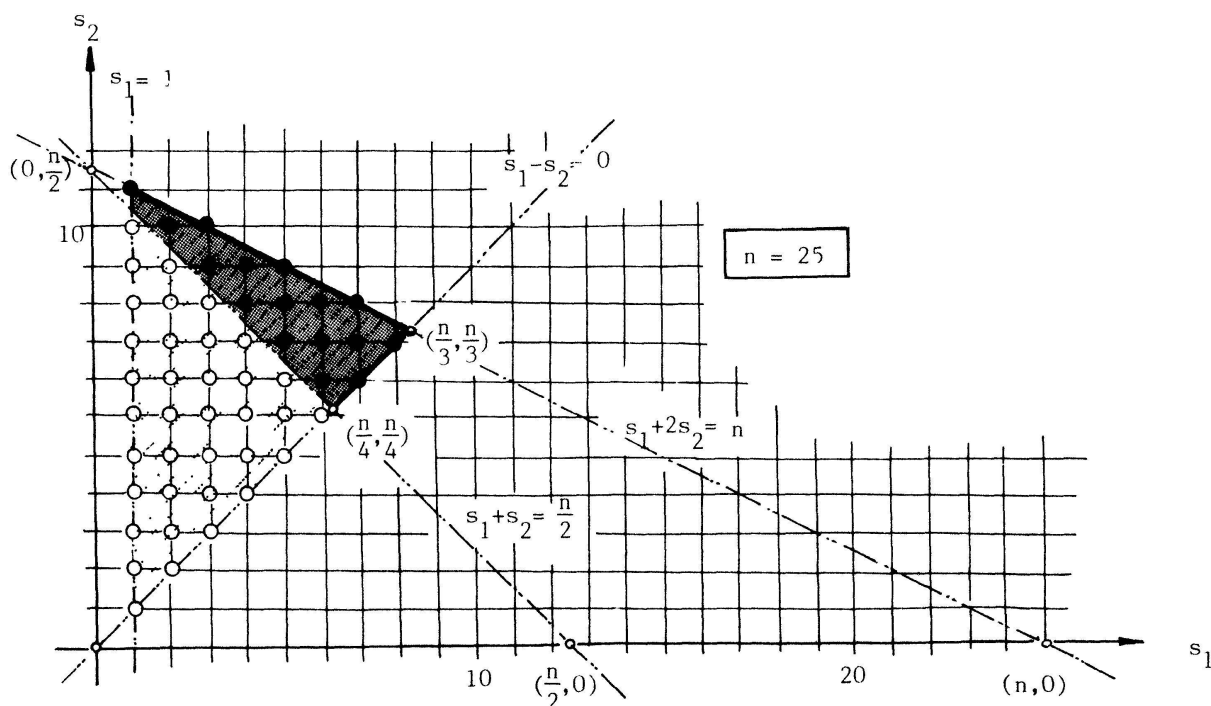
auf

$$s_2 \leq s_3 \Leftrightarrow s_1 + 2s_2 \leq n \quad (2,5)$$

$$s_1 + s_2 > s_3 \Leftrightarrow s_1 + s_2 > \frac{n}{2} \quad (2,6)$$

Mit den Ungleichungen auf der rechten Seite von (2,5) und (2,6) sind jetzt sämtliche Nebenbedingungen in s_1 und s_2 ausgedrückt.

Bei zwei vorhandenen Parametern liegt stets eine Veranschaulichung der bestehenden Zusammenhänge an einer ebenen Figur auf der Hand. Bezogen auf ein $s_1 s_2$ -Koordinaten-



Figur 2.1.

system repräsentieren lineare Ungleichungen offene bzw. abgeschlossene Halbebenen und Zahlenpaare (s_1, s_2) mit $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$ definieren Gitterpunkte auf dem Einheits-Gitter im ersten Quadranten.

Diese Umsetzung führt im Falle $n = 25$ auf eine Konfiguration, die in der Fig. 2.1 aufgezichnet ist.

Die Gitterpunkte im Innern und auf dem Rand des schraffierten Bereiches gehören zu den Partitionen der Zahl n mit genau 3 Summanden, die Gitterpunkte im Innern und auf dem ausgezogenen Rand des getönten Gebietes zu den Dreiecks-Partitionen vom Index n . Die

Gerade mit der Gleichung $s_1 + 2s_2 = \frac{n}{2}$ schliesst nämlich die offene Halbebene ab, die durch die mit der Dreiecks-Ungleichung (2,3) äquivalente Ungleichung $s_1 + s_2 < \frac{n}{2}$ definiert ist.

Die geometrische Betrachtungsweise zeigt zunächst einmal eine Möglichkeit auf, für nicht allzugrosse Werte von n die Menge \mathbb{F}_n abzuzählen und aufzulisten. Wie sich gleich zeigen wird, ist sie aber auch sehr hilfreich bei der Bewältigung der beiden aufgeworfenen generellen kombinatorischen Probleme. So kann z. B. der Fig. 2.1 sofort der folgende *Auflist-Algorithmus* für die Menge \mathbb{F}_n entnommen werden:

```

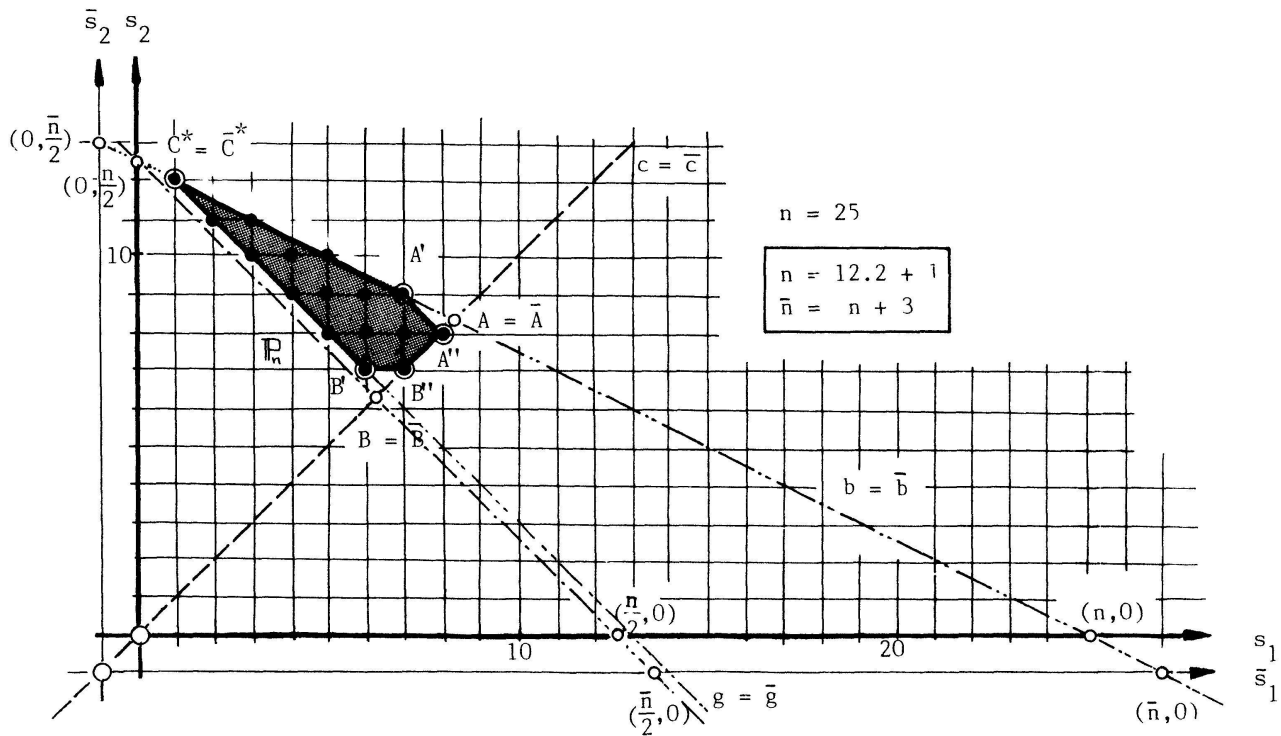
Eingabe  $n$ 
 $d := 0$ 
Wiederhole von  $s_1 = 1$ 
  Wiederhole von  $s_2 = s_1$ 
    Wenn  $s_1 + s_2 > n/2$ , dann
       $s_3 := n - (s_1 + s_2)$ 
      drucken  $(s_1, s_2, s_3)$ 
       $d := d + 1$ 
    Ende wenn
  bis  $s_2 = (n - s_1)/2$ 
bis  $s_1 = n/2$ 
ENDE

```

Ueber den Zählparameter d kann damit gleichzeitig auch die Anzahl der Dreiecks-Partitionen vom Index n bestimmt werden. Zur Herleitung einer Formel für $d(n)$ ist aber der vorliegende geometrische Lösungsansatz noch etwas tiefer auszuloten.

3. Vorbereitungen zur Herleitung einer Anzahl-Formel für die Dreiecks-Partitionen

Die mit der geometrischen Betrachtungsweise verbundene Abbildung der Dreiecks-Partitionen vom Index n auf eine bestimmte Gitterpunkt-Menge \mathbb{G}_n in der s_1s_2 -Ebene suggeriert, eine generelle Abzählung der Dreiecks-Partitionen über die Picksche Formel zu versuchen. Dieses Vorgehen setzt voraus, dass für jeden genügend grossen Wert von n [3*] ein charakteristischer Polygon-Bereich \mathbb{P}_n gefunden werden kann, so dass die Menge der Rand- und der Innen-Punkte von \mathbb{P}_n mit der jeweiligen Gitterpunkt-Menge \mathbb{G}_n übereinstimmt.



Figur 3.1.

Die Fig. 3.1 zeigt die den Dreiecks-Partitionen vom Index n entsprechende Gitterpunkt-Menge \mathbb{G}_n (mit \bullet markierte Gitterpunkte) und den zugehörigen Polygon-Bereich \mathbb{P}_n für $n = 25$.

Die 3 Randgeraden a, b, c mit den Gleichungen

$$s_1 + s_2 = \frac{n}{2}, \quad s_1 + 2s_2 = n, \quad s_1 - s_2 = 0$$

bestimmen ein Dreieck mit den Eckpunkten

$$A\left(\frac{n}{3}, \frac{n}{3}\right), \quad B\left(\frac{n}{4}, \frac{n}{4}\right), \quad C\left(0, \frac{n}{2}\right), \quad (3,1)$$

deren Koordinaten nur vereinzelt ganzzahlig sind. Es sei C^* der C nächstliegende Punkt aus \mathbb{G}_n auf der Geraden b .

C^* hat offenbar die Koordinaten

$$\begin{aligned} &(1, \frac{1}{2}(n-1)) \quad \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ &(2, \frac{1}{2}(n-2)) \quad \text{wenn } n \text{ gerade} \end{aligned} \quad (3,2)$$

und man erhält für die Parallele g zu a durch C^* die Gleichung

$$s_1 + s_2 = \begin{cases} \frac{1}{2}(n+1) & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}(n+2) & \text{wenn } n \text{ gerade.} \end{cases} \quad (3,3)$$

Die Trägergeraden von Punkten aus \mathbb{G}_n im Parallelenfeld zu a folgen sich in vertikalen bzw. horizontalen Abständen von einer Einheit. Man schliesst daraus, dass unterhalb der Geraden g keine weiteren Punkte von \mathbb{G}_n liegen.

Es sei nun weiter

A' der A nächstliegende Punkt aus \mathbb{G}_n auf der Geraden b ,

A'' der A nächstliegende Punkt aus \mathbb{G}_n auf der Geraden c ,

B' der B nächstliegende Punkt aus \mathbb{G}_n auf der Geraden g ,

B'' der B nächstliegende Punkt aus \mathbb{G}_n auf der Geraden c .

Offenbar bildet jetzt das Polygon $A'A''B'B'C^*$ den Rand des zum Index n gehörenden Bereiches \mathbb{P}_n , wobei noch zu bemerken ist, dass für einzelne Werte von n Eckpunkt-Koinzidenzen von der Art $A' = A'' = A$ oder $B' = B''$ möglich sind. Als Rand-Polygone treten somit Fünfecke, Vierecke und Dreiecke auf [4*].

Falls für den Polygon-Bereich \mathbb{P}_n die Anzahl r der Rand-Gitterpunkte und der Flächeninhalt $f(\mathbb{P}_n)$ bekannt sind, dann kann daraus über die Picksche Formel die Anzahl i der Innen-Gitterpunkte und damit die Mächtigkeit $i+r$ der Menge \mathbb{G}_n bestimmt werden. Man hat dann

$$\begin{aligned} d(n) &= |\mathbb{D}_n| = |\mathbb{F}_n| = |\mathbb{G}_n| \\ &= i + r = \left(i + \frac{r}{2} - 1\right) + \left(\frac{r}{2} + 1\right) = f(\mathbb{P}_n) + \left(\frac{r}{2} + 1\right). \end{aligned} \quad (3,4)$$

Ge- rade	Parameterdarstellung	Anzahl der Punkte von \mathbb{G}_n auf der betreffenden Geraden
g	$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} s_1 = t \\ s_2 = \frac{1}{2}(n+1) - t \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(n+1) - t \geq t \\ s_2 \geq s_1 \end{array} \right. \Rightarrow r_g = \left\lfloor \frac{1}{4}(n+1) \right\rfloor \text{ wenn } n \text{ ungerade} \\ \left\{ \begin{array}{l} s_1 = 1+t \\ s_2 = \frac{n}{2} - t \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{2} - t \geq 1+t \\ s_2 \geq s_1 \end{array} \right. \Rightarrow r_g = \left\lfloor \frac{1}{4}(n-2) \right\rfloor \text{ wenn } n \text{ gerade} \end{array} \right.$	
b	$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} s_1 = -1 + 2t \\ s_2 = \frac{1}{2}(n+1) - t \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 + 2t < \frac{n}{3} \\ s_2 < \frac{n}{3} \end{array} \right. \Rightarrow r_b = \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor \text{ wenn } n \text{ ungerade} \\ \left\{ \begin{array}{l} s_1 = 2t \\ s_2 = \frac{n}{2} - t \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2t < \frac{n}{3} \\ s_2 < \frac{n}{3} \end{array} \right. \Rightarrow r_b = \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor \text{ wenn } n \text{ gerade} \end{array} \right.$	
c		$r_c = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$

Zunächst wollen wir für \mathbb{P}_n die Zahl r bestimmen. Wir gehen dabei von Parametrisierungen der Randgeraden g und b aus, die bei jeweils r_x Rand-Gitterpunkten diese gerade für die Parameterwerte

$$t = 1, 2, \dots, r_x$$

liefern. Aus der besonderen Lage von c kann r_c direkt als Anzahl der natürlichen Zahlen im Intervall $\left[\left[\frac{n}{4}\right], \left[\frac{n}{3}\right]\right]$ abgelesen werden [5*].

Die Koordinaten von A'' und B'' gehen unmittelbar aus der Fig. 3.1 hervor. Andererseits können die Koordinaten von A' und B' über die benutzten Parameterdarstellungen für die Geraden c und g gewonnen werden.

Das Ergebnis ist in der folgenden Tafel zusammengefasst.

Punkt	Koordinaten	
A'	$\begin{cases} \left(2\left[\frac{n+3}{6}\right] - 1, \quad \frac{n}{2} - \left[\frac{n+3}{6}\right]\right) & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ \left(2\left[\frac{n}{6}\right], \quad \frac{n}{2} - \left[\frac{n}{6}\right]\right) & \text{wenn } n \text{ gerade} \end{cases}$	
A''	$\left(\left[\frac{n}{3}\right], \quad \left[\frac{n}{3}\right]\right)$	(3,6)
B'	$\begin{cases} \left(\left[\frac{1}{4}(n+1)\right], \quad \frac{1}{2}(n+1) - \left[\frac{1}{4}(n+1)\right]\right) & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ \left(\left[\frac{1}{4}(n+2)\right], \quad \frac{1}{2}(n+2) - \left[\frac{1}{4}(n+2)\right]\right) & \text{wenn } n \text{ gerade} \end{cases}$	
B''	$\left(\left[\frac{n}{4}\right] + 1, \quad \left[\frac{n}{4}\right] + 1\right)$	

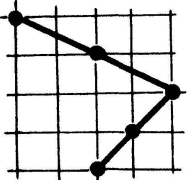
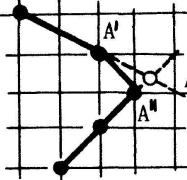
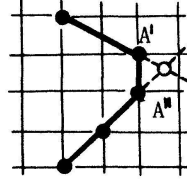
Die in den Koordinaten der Punkte A' , A'' , B' , B'' und C^* auftretenden Nenner lassen erwarten, dass die *Quadratgitter-Umgebung* von A und von B und damit die Form des Polygon-Bereiches \mathbb{P}_n durch die *Restklassenlage von n modulo 12* bestimmt ist. Wir setzen daher

$$n = 12p + q \quad \text{mit} \quad p = (n \text{ DIV } 12), \quad q = (n \text{ MOD } 12). \quad (3,7)$$

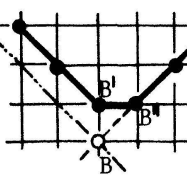
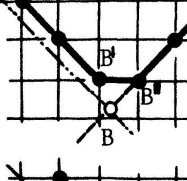
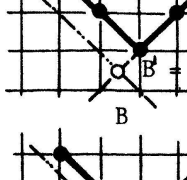
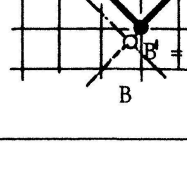
In den Parametern p und q ausgedrückt, erhalten dann die Punkte A und B die Koordinaten

$$A\left(p + \frac{q}{3}, p + \frac{q}{3}\right); \quad B\left(3p + \frac{q}{4}, 3p + \frac{q}{4}\right). \quad (3,8)$$

Für den Punkt A folgt man daraus drei verschiedene Umgebungs-Konfigurationen, denn der gebrochene Teil von $p + \frac{q}{3}$ kann die Werte $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ annehmen (Zusammenstellung (3,9)).

q	Konfiguration	Koordinaten
0, 3, 6, 9		$A(4p + \frac{q}{3}, 4p + \frac{q}{3})$ $A' = A'' = A$
1, 4, 7, 10		$A'(4p + \frac{q-4}{3}, 4p + \frac{q+2}{3})$ $A''(4p + \frac{q-1}{3}, 4p + \frac{q-1}{3})$
2, 5, 8, 11		$A'(4p + \frac{q-2}{3}, 4p + \frac{q+1}{3})$ $A''(4p + \frac{q-2}{3}, 4p + \frac{q-2}{3})$

(3,9)

q	Konfiguration	Koordinaten
0, 4, 8		$B(3p + \frac{q}{4}, 3p + \frac{q}{4})$ $B'(3p + \frac{q}{4}, 3p + \frac{q+4}{4})$ $B''(3p + \frac{q+4}{4}, 3p + \frac{q+4}{4})$
1, 5, 9		$B(3p + \frac{q}{4}, 3p + \frac{q}{4})$ $B'(3p + \frac{q-1}{4}, 3p + \frac{q+3}{4})$ $B''(3p + \frac{q+3}{4}, 3p + \frac{q+3}{4})$
2, 6, 10		$B(3p + \frac{q}{4}, 3p + \frac{q}{4})$ $B'(3p + \frac{q+2}{4}, 3p + \frac{q+2}{4})$
3, 7, 11		$B(3p + \frac{q}{4}, 3p + \frac{q}{4})$ $B'(3p + \frac{q+1}{4}, 3p + \frac{q+1}{4})$

(3,10)

Andererseits bestehen für den gebrochenen Teil in den Koordinaten von B die vier Möglichkeiten $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$, woraus man entnehmen kann, dass im Punkt B vier verschiedene Umgebungs-Konfigurationen auftreten (Zusammenstellung (3,10)).

4. Die Anzahl-Folge bei den Dreiecks-Partitionen

Als Beispiel wollen wir uns den Fall $q = 1$ ausführlich vornehmen. Wir lassen uns dabei von der früheren Fig. 3.1 leiten, in der die geometrische Situation für $n = 12 \cdot 2 + 1 = 25$ dargestellt ist. Diese Figur repräsentiert jetzt gleichzeitig den Form-Typus der Polygon-Bereiche \mathbb{P}_n , der zur Restklasse der n mit der Zerfällung $n = 12p + 1$ gehört. In der Fig. 3.1 sind auch bereits einige Ergänzungen angebracht, die erst an dieser Stelle zum Tragen kommen.

Für $q = 1$ ist der Rand von \mathbb{P}_n ein Fünfeck. Es ist dann gemäss (3,5)

$$r = r_g + r_b + r_c - 1 = 3p + 2p + (4p - 3p) - 1 = 6p - 1.$$

↑
kompensiert die Doppelzählung von C^*

Der Flächeninhalt beträgt aufgrund der in (3,2), (3,9) und (3,10) vorgefundenen Eckpunkt-Koordinaten

$$\begin{aligned} f(\mathbb{P}_{12p+1}) &= f(\triangle O C^* B') + f(\triangle O B' B'') + \underbrace{f(\triangle O B'' A'')} + f(\triangle O A'' A') + f(\triangle O A' C^*) \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 3p \\ 6p & 3p+1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3p & 3p+1 \\ 3p+1 & 3p+1 \end{vmatrix} + \underbrace{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4p & 4p-1 \\ 4p & 4p+1 \end{vmatrix}}_0 + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4p-1 & 1 \\ 4p+1 & 6p \end{vmatrix} \quad (4,1) \end{aligned}$$

so dass

$$d(12p+1) = f(\mathbb{P}_{12p+1}) + \left(\frac{r}{2} + 1\right) = \left(3p^2 - p + \frac{1}{2}\right) + \left(3p - \frac{1}{2} + 1\right) = 3p^2 + 2p \quad (4,2)$$

ist. Grundsätzlich kann man auf diese Weise für jeden Wert von q zu einer generellen Anzahl-Formel gelangen.

Bevor wir das Problem der Anzahl-Formel weiter verfolgen, wollen wir anhand der Fig. 3.1 noch eine Rekursionsformel für die Anzahl-Folge $\{d(n)\}$ herleiten. Damit lässt sich nämlich die ganze Diskussion wesentlich vereinfachen.

Ist n eine ungerade Zahl, dann lässt sich zunächst zeigen, dass die beiden Polygon-Bereiche \mathbb{P}_n und \mathbb{P}_{n+3} kongruent sind. Diese Tatsache kann sofort aus unserer geometrischen Veranschaulichung entnommen werden, wenn man die beiden massgebenden Gitterpunkt-Mengen zu den Indizes n und $\bar{n} = n + 3$ gemäss Fig. 3.1 auf zwei verschiedene

Koordinatensysteme bezieht. Aus der Fig. 3.1 lässt sich unmittelbar ablesen, dass $\bar{g} = g$, $\bar{b} = b$, $\bar{c} = c$ und dies besagt, dass die entsprechenden Polygon-Bereiche identisch sind. Damit ist für die Funktion $n \rightarrow d(n)$ die partiell gültige Rekursionsformel

$$d(n+3) = d(n) \quad \text{für } n \text{ ungerade} \quad (4,3^a)$$

nachgewiesen. Zugleich ist damit gezeigt, dass nur 6 Form-Typen von Polygon-Bereichen \mathbb{P}_n vorhanden sind.

Es liegt jetzt auf der Hand, beim entsprechenden Sprung von n zu $\bar{n} = n + 3$ bei geradem n nach einer analogen Gesetzmässigkeit Ausschau zu halten und damit allenfalls die Rekursionsformel (4,3^a) zu ergänzen.

Bei gleichem Vorgehen erhält man jetzt aber eine Figur, in der die beiden Punkte C^* und \bar{C}^* nicht zusammenfallen und dies hat zur Folge, dass $\bar{g} \neq g$ ist. Im ersten Moment scheint sich hier eine Enttäuschung anzubahnen. Ueberlegt man sich die Sache aber genauer, dann kann man auch in diesem Falle zu einer Rekursionsformel gelangen. Beim Uebergang von n zu $\bar{n} = n + 3$ kommen nämlich jetzt zu den Gitterpunkten von \mathbb{P}_n genau die Punkte auf $\bar{g} \cap \mathbb{P}_n$ hinzu. Ihre Anzahl ist aufgrund von (3,5)

$$\bar{r}_g = \left\lfloor \frac{1}{4}(n+3) + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{4}(n+4) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1$$

weil $n+3$ ungerade ist. Damit ergibt sich in Ergänzung zu (4,3^a)

$$d(n+3) = d(n) + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1 \quad \text{für } n \text{ gerade.} \quad (4,3^b)$$

Mit den Rekursionsformeln (4,3) kann man jetzt die Anzahl-Folge $\{d(n)\}$ mühelos aus den Anfangswerten

$$d(3) = 1, \quad d(4) = 0, \quad d(5) = 1$$

berechnen. Insbesondere erhält man etwa

$$\begin{aligned} d(25) = d(22) + 6 = d(19) + 6 = d(16) + 11 = d(13) + 11 = d(10) + 14 \\ d(7) + 14 = d(4) + 16 = 16. \end{aligned}$$

Die Rekursionsformeln (4,3) sind in anderer Gestalt bereits bekannt [6*]. Bemerkenswert an der vorliegenden Herleitung ist die Tatsache, dass nur elementare Ueberlegungen erforderlich sind. Sie zeigt zugleich, dass die geometrische Betrachtungsweise oft überraschende Einsichten freilegt.

Wir wollen jetzt die begonnene Herleitung einer Anzahl-Formel weiterführen. Aufgrund der Rekursionsformel (4,3^a) können wir uns bei der Durchforstung der verschiedenen Form-Typen bei den Polygon-Bereichen \mathbb{P}_n auf die ungeraden q -Werte beschränken. Mit

analogen Ueberlegungen wie im Falle $q=1$ wird man auf die in der folgenden Tafel zusammengestellten Terme für die Anzahlen $d(12p+q)$ geführt:

q	n	$d(12p+q)$	h	$-(q+3)^2 + 48h$
1	$12p+1$	$3p^2+2p$	0	$-15 = -16$
3	$12p+3$	$3p^2+3p+1$	1	$-36+48=12$
5	$12p+5$	$3p^2+4p+1$	1	$-64+48=-16$
7	$12p+7$	$3p^2+5p+2$	2	$-100+96=-4$
9	$12p+9$	$3p^2+6p+3$	3	$-144+144=0$
11	$12p+11$	$3p^2+7p+4$	4	$-196+192=-4$

Die quadratischen Polynome in p in der dritten Kolonne lassen sich auf die Gestalt

$$3p^2 + \frac{1}{2}(q+3)p + h \quad (4,4)$$

bringen. Die jeweiligen Werte von h sind in der vierten Kolonne nochmals aufgeführt. Unser Ziel ist es, die festgestellten Anzahlen

$$d(12p+q) = 3p^2 + \frac{1}{2}(q+3)p + h$$

in der Primär-Variablen $n = 12 + q$ auszudrücken. Wir ziehen dazu die quadratische Ergänzung von $3p^2 + \frac{1}{2}(q+3)p$ heran und setzen

$$\begin{aligned} d(12p+q) &= \frac{1}{48} (144p^2 + 12 \cdot 2(q+3)p + 48h) \\ &= \frac{1}{48} \underbrace{((12p + (q+3))^2)}_{n+3} + \underbrace{(-(q+3)^2 + 48h)}_c. \end{aligned}$$

Der jeweilige Wert von c ist in der fünften Kolonne unserer Tafel notiert. Ihr kann man entnehmen, dass

$$16 \leq -(q+3)^2 + 48h \leq +12$$

ist. Für ungerade n gilt somit

$$\frac{1}{48} \underbrace{((n+3)^2 - 16)}_{\substack{\text{Gleichheit} \\ \text{für} \\ q=1,5}} \leq d(n) \leq \frac{1}{48} \underbrace{((n+3)^2 + 12)}_{\substack{\text{Gleichheit} \\ \text{für} \\ q=3}} \quad (4,5)$$

Die vorliegende Abschätzung basiert auf einem Intervall der Breite $\frac{28}{48}$, in dem höchstens eine ganze Zahl enthalten sein kann. Da $d(n)$ ganzzahlig ist, folgert man aus (4,5), dass

$$d(n) = \left\lfloor \frac{1}{48} ((n+3)^2 + 12) \right\rfloor, \text{ für } n \text{ ungerade.}$$

Ueber die Rekursionsformel (4,3^a) lässt sich dies noch ergänzen mit

$$d(n) = d(n+3) = \left\lfloor \frac{1}{48} ((n-3)+3)^2 + 12 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{48} (n^2 + 12) \right\rfloor \text{ für } n \text{ gerade.}$$

Damit steht für die Dreiecks-Partitionen die Anzahl-Formel

$$d(n) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{1}{48} ((n+3)^2 + 12) \right\rfloor & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \left\lfloor \frac{1}{48} (n^2 + 12) \right\rfloor & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} \quad (4,6)$$

fest. Wie man leicht bestätigt, liefert sie auch dann die richtigen Werte, wenn in unserer geometrischen Veranschaulichung die Formel von Pick noch nicht benutzt werden kann.

5. Dreiecks-Kompositionen

Herrn F. Bachmann in Burgdorf verdanke ich den Hinweis, dass eine elementare Herleitung der Anzahl-Formel für die Dreiecks-Partitionen auch in Anlehnung an eine Aufgabe aus dem bekannten Lehr- und Übungsbuch von Polya-Szegö [5] möglich ist. Dort ist in Aufgabe 31 von Abschnitt I die Frage nach der Anzahl Lösungen der Diophantischen Gleichung

$$s_1 + s_2 + s_3 = n; \quad s_1, s_2, s_3 \in N \quad (5,1)$$

gestellt, die den Nebenbedingungen

$$s_1 \leq s_2 + s_3; \quad s_2 \leq s_3 + s_1; \quad s_3 \leq s_1 + s_2$$

genügen. Ersetzt man diese Nebenbedingungen durch

$$s_1 < s_2 + s_3; \quad s_2 < s_3 + s_1; \quad s_3 < s_1 + s_2 \quad (5,2)$$

dann repräsentiert jedes Lösungs-Tripel ein Dreieck vom Umfang n mit ganzzahligen Seiten. Im Gegensatz zum Abschnitt 2 erhält man jetzt aber Tripel, zu denen dieselbe

Figur in \mathbb{D}_n gehört. So beschreiben etwa die Tripel

$$(6, 7, 12), \quad (6, 12, 7), \quad (7, 6, 12), \quad (7, 12, 6), \quad (12, 6, 7), \quad (12, 7, 6)$$

dasselbe Dreieck vom Umfang $n = 25$.

In der neueren Kombinatorik bezeichnet man *additive Zerlegungen einer natürlichen Zahl n bei Berücksichtigung der Summanden-Reihenfolge* als *Kompositionen*. Dementsprechend wollen wir nun die Lösungs-Figuren

$$s_1 + s_2 + s_3$$

von (5,1), (5,2) als *Dreiecks-Kompositionen* ansprechen.

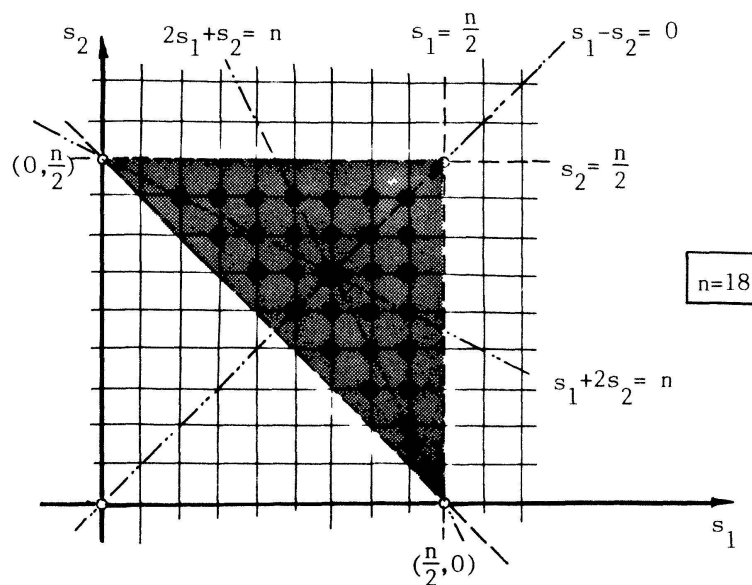
Zur Abzählung der Dreiecks-Kompositionen vom Index n schlägt F. Bachmann in einer brieflichen Mitteilung an den Autor das folgende Prozedere vor. Stützt man sich wiederum auf die Parameter s_1 und s_2 , dann erhält man vermöge

$$s_3 = n - (s_1 + s_2)$$

anstelle der Ungleichungen (5,2) die neuen Restriktionen

$$s_1 < \frac{n}{2}; \quad s_2 < \frac{n}{2}; \quad s_1 + s_2 > \frac{n}{2}. \quad (5,3)$$

Dementsprechend lassen sich die Dreiecks-Kompositionen durch die Gitterpunkte im Innern eines Bereiches veranschaulichen, der von einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck berandet wird (Fig. 5.1).



Figur 5.1.

Zur Bestimmung der Anzahl $g(n)$ der Dreiecks-Kompositionen genügt nun die Kenntnis der Anzahl Gitterpunkte in der jeweils obersten Reihe; ihre Anzahl beträgt

$$\frac{n-1}{2} \quad \text{wenn } n \text{ ungerade}$$

$$\frac{n}{2} - 2 = \frac{n-4}{2} \quad \text{wenn } n \text{ gerade.}$$

Daraus entnimmt man jetzt

$$g(n) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} k = \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{2} \right) \left(\frac{n-1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{8} (n-1)(n+1) & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n-4)} k = \frac{1}{2} \left(\frac{n-4}{2} \right) \left(\frac{n-4}{2} + 1 \right) = \frac{1}{8} (n-4)(n-2) & \text{wenn } n \text{ gerade.} \end{cases} \quad (5,4)$$

Aus (5,4) geht hervor, dass auch bei den Kompositions-Zahlen

$$g(n+3) = g(n) \quad \text{wenn } n \text{ gerade} \quad (5,5)$$

gilt.

Um von den Kompositions-Zahlen $g(n)$ zu den Partitions-Zahlen $d(n)$ zu gelangen, kann man die Partitionen als Klassen von permutationsgleichen Kompositionen interpretieren. Dabei ist zu beachten, dass eine bestimmte Partition aus einer

$$\left. \begin{array}{l} 1\text{-er Klasse} \\ 3\text{-er Klasse} \\ 6\text{-er Klasse} \end{array} \right\} \text{ entsteht, je nachdem ob sie } \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ gleiche} \\ 2 \text{ gleiche} \\ \text{lauter ungleiche} \end{array} \right. \text{ Summanden besitzt.}$$

Eine 1-er Klasse von Kompositionen ist gekennzeichnet durch $s_1 = s_2 = s_3$; eine solche existiert offenbar genau dann, wenn n durch 3 teilbar ist.

Bei einer 3-er Klasse von Kompositionen ist

$$s_1 = s_2 \neq s_3 \quad \text{oder} \quad \underbrace{s_2 = s_3 \neq s_1}_{s_2 = n - (s_1 + s_2)} \quad \text{oder} \quad \underbrace{s_3 = s_1 \neq s_2}_{n - (s_1 + s_2) = s_1}$$

Die entsprechenden Gitterpunkte liegen auf den in der Fig. 5.1 eingezeichneten Geraden f_1, f_2, f_3 . Aus Gründen der Symmetrie enthalten alle drei Geraden gleichviele Gitterpunkte, nämlich deren

$$\left[\frac{n+1}{2} \right] \quad \text{wenn } n \text{ ungerade}$$

$$\left[\frac{n-2}{2} \right] \quad \text{wenn } n \text{ gerade}$$

ist. So liegen bei ungeradem n auf der Geraden f_1 genau die Gitterpunkte mit den Abszissen

$$1, 3, \dots, 2h - 1 < \frac{n}{2},$$

so dass also $h \leq \left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil$ ist. Andererseits schliesst man für gerades n auf die Abszissenbedingung

$$2, 4, \dots, 2h < \frac{n}{2},$$

aus der man $h \leq \left\lceil \frac{n-2}{4} \right\rceil$ entnimmt.

Falls n durch 3 teilbar ist, schneiden sich die Geraden f_1, f_2, f_3 in einem Gitterpunkt, der als Ausnahmepunkt ($s_1 = s_2 = s_3$) ausgeschieden werden muss.

In 6-er Klassen eingebunden sind alle übrigen markierten Gitterpunkte in der Fig. 5.1. Die Anzahl der 3-er Klassen ist nun gerade gleich der Anzahl Gitterpunkte auf einer der drei Geraden f_1, f_2, f_3 , wobei der Schnittpunkt der drei Geraden – falls er ein Gitterpunkt ist – nicht mitzuzählen ist.

Mit dieser Ueberlegung folgt etwa für gerades n

$$d(n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n-2}{4} \right\rceil + \frac{1}{6} \left(g(n) - 3 \left\lceil \frac{n-2}{4} \right\rceil \right) = \frac{1}{6} g(n) + \frac{1}{2} \left\lceil \frac{n-2}{4} \right\rceil & \text{falls } 3 \nmid n \\ \underbrace{\left(\left\lceil \frac{n-2}{4} \right\rceil - 1 \right) + 1}_{\text{3-er Klassen}} + \underbrace{\frac{1}{6} \left(g(n) - 3 \left\lceil \frac{n-2}{4} \right\rceil + 2 \right)}_{\substack{\text{6-er Klassen} \\ \text{1-er Klasse}}} = \frac{1}{6} g(n) + \frac{1}{2} \left\lceil \frac{n-2}{4} \right\rceil + \frac{1}{3} & \text{falls } 3 \mid n \end{cases}$$

Man kann dies auch zusammenfassen in

$$d(n) = \left\lceil \frac{1}{48} (n-4)(n-2) + \frac{1}{2} \left\lceil \frac{n-2}{4} \right\rceil + \frac{1}{3} \right\rceil. \quad (5,6)$$

Da

$$0 \leq \frac{n-2}{4} - \left\lceil \frac{n-2}{4} \right\rceil \leq \frac{1}{2} \quad \text{für } n \text{ gerade}$$

ist, folgt weiter

$$\begin{aligned} d(n) &= \left\lceil \frac{1}{48} (n-4)(n-2) + \frac{1}{2} \frac{n-2}{4} + \frac{1}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{48} (n^2 - 6n + 8 + 6n - 12 + 16) \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{1}{48} (n^2 + 12) \right\rceil. \end{aligned} \quad (5,7^a)$$

Für ungerade n erhält man mit den analogen Ueberlegungen

$$\begin{aligned} d(n) &= \left[\frac{1}{48} (n-1)(n+1) + \frac{1}{2} \frac{n-1}{4} + \frac{1}{3} \right] = \left[\frac{1}{48} (n^2 - 1 + 6n + 6 + 16) \right] \\ &= \left[\frac{1}{48} ((n+3)^2 + 12) \right]. \end{aligned} \quad (5,7^b)$$

Damit ist die Formel (4,6) neu hergeleitet.

M. Jeger, ETH-Zürich

(Fortsetzung im nächsten Heft)

LITERATUR

- 1 Coxeter H. S. M.: Unvergängliche Geometrie, Basel 1981².
- 2 Jeger M.: Einführung in die Kombinatorik, Band 1 und Band 2, Stuttgart 1973, 1976.
- 3 Jeger M.: Die Formel von Pick und ihr elementar-mathematisches Umfeld. Didaktik der Mathematik (DdM) 1982/1, 1–24).
- 4 Liu C. L.: Introduction to Combinatorial Mathematics; New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, London, Sydney 1968.
- 5 Polya G., Szegő G.: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 19, Berlin 1925.

ANMERKUNGEN

- [1*] Benannt nach dem Mathematiker G. Pick (1859–1942).
- [2*] Masseinheit für den Flächeninhalt $f(\mathbb{P})$ ist die Gitter-Masche (Quadrat).
- [3*] Man kann sich überlegen, dass die Picksche Formel auf \mathbb{G}_n anwendbar ist, sobald zwei Punkte von \mathbb{G}_n auf der Geraden mit der Gleichung $s_1 + 2s_2 = n$ liegen. Aus der Fig. 3.1 liest man ab, dass dies zutrifft für
- $$3 \leq \frac{n}{3}, \text{ d. h. } n \geq 9, \text{ wenn } n \text{ ungerade,}$$
- $$4 \leq \frac{n}{3}, \text{ d. h. } n \geq 12, \text{ wenn } n \text{ gerade.}$$
- [4*] Der Rand von \mathbb{P}_n ist die konvexe Hülle der Gitterpunkt-Menge \mathbb{G}_n .
- [5*] $[a]$ bezeichnet die grösste ganze Zahl kleiner oder gleich a .
- [6*] Vgl. etwa [2] (Bd. 2, p. 54–55) und [4] (p. 91).