

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 45 (1990)  
**Heft:** 6

**Rubrik:** Literaturüberschau

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Literaturüberschau

E. Hartmann: Computerunterstützte Darstellende Geometrie. MikroComputer-Praxis. 248 Seiten, DM 26,80. B. G. Teubner, Stuttgart 1988.

Die darstellende Geometrie ist heute noch anerkannt als Disziplin, die sich mit der Herstellung von Bildern räumlicher Objekte bei den gängigen Projektionen befasst. Daneben fristet sie auch noch ein kümmerliches Dasein im Geometrie-Unterricht; sie ist nämlich einigen wenigen Schultypen als effizienter Bereich zur Entwicklung und zur Förderung des Raumverständnisses erhalten geblieben.

Das vorliegende Buch beschäftigt sich ausschliesslich mit der computer-gestützten Konstruktion anschaulicher Bilder. Die didaktisch geschickt aufgebauten Programme in PASCAL sind bewusst auf Übersichtlichkeit ausgelegt. Dies wird erreicht durch die Anwendung des Baukasten-Prinzips mit relativ einfachen Prozeduren für die zahlreichen Einzelprobleme. Damit ist die Übertragbarkeit in andere Programmier-Sprachen gewährleistet. Zugleich wird der Leser bei diesem Konzept sofort in die Lage versetzt, selbst weitere Programme zusammenzustellen.

Es werden Algorithmen für die Normal-Projektion und die Zentral-Projektion dargelegt und insbesondere die geometrischen Probleme angegangen, die bei der Darstellung von Polyedern (Sichtbarkeit) und von speziellen Flächen 2. Ordnung (wie z. B. das Auftreten von Kegelschnitten als Schnittkurven und Umrisslinien) anfallen. Im Zusammenhang mit den Flächen 2. Ordnung werden auch Algorithmen zur Erfassung von Durchdringungskurven diskutiert. Schliesslich erörtert der Autor am Beispiel des Torus das Verfahren zur Darstellung von allgemeineren Flächen mit geradlinigen Netzen. Dieser Abschnitt gibt ihm Gelegenheit, das Clipping-Problem zur Sprache zu bringen.

Im wesentlichen besteht das Buch aus einer systematisch angeordneten Programm-Sammlung, die handfest zeigt, wie auf der algorithmischen Ebene vorzugehen ist, wenn man Computer-Bilder herstellen will. Wer sich in das computer-gestützte Konstruieren einarbeiten möchte, ist mit diesem Buch gut beraten. Es zeigt übrigens recht deutlich, dass diese Form von «Geometrie mit dem Computer» sowohl auf der Hardware- wie auch auf der Software-Seite nur mit grösserem Aufwand praktikabel ist.

M. Jeger

W. Fenchel: Elementary Geometry in Hyperbolic Space. de Gruyter Studies in Mathematics 11. XI und 225 Seiten, DM 128,-. de Gruyter, Berlin, New York 1989.

Here is a very interesting book on hyperbolic geometry written by one of the masters in this field, Werner Fenchel, known for his contributions in differential geometry, the theory of convex bodies and the geometry of Riemann surfaces. For the expert the book offers many details and careful discussions of the special cases which are usually difficult to find in the literature; for the novice it offers a readable introduction into hyperbolic geometry with an emphasis on synthetic geometric arguments.

After a preliminary chapter which contains many useful identities for fractional linear transformations and hyperbolic functions, the book starts with a thorough study of the Möbius group operating on the extended three dimensional Euclidean space. The point of view of elementary geometry of the book is reflected very nicely in the proof (p. 18) that every bijection of the extended Euclidean plane which preserves straight lines and circles is a similarity transformation. Chapter II ends with a representation of the Möbius group (in dimension 3) by linear fractional transformations acting on quaternions.

Chapters III & IV introduce into the geometry of hyperbolic 3-space. Although the description is based entirely on the upper half space model, the arguments are, whenever possible, of a synthetic geometric nature. The introduction of hyperbolic geometry starts with the incidence and orthogonality relations, then introduces the hyperbolic metric as the unique Riemannian metric (up to a constant factor) which is invariant under the Möbius group, and continues with the classification of the isometries by means of their invariant elements. Here we also find the decomposition of isometries into products of plane reflections, line reflections and point reflections.

The central part of the book is devoted to the geometry of the right-angled geodesic hexagon. These hexagons play a decisive role in the geometry of the compact Riemann surfaces and have been widely used in the celebrated (still unpublished) Fenchel-Nielsen manuscript of which the present book may be seen as an extended version of the first part. There is a striking similarity between the trigonometric formulae of a geodesic triangle and those of the right-angled hexagon, and there are many other geodesic polygons in the hyperbolic plane which have similar formulae.

It is known that these formulae can be derived from a single algebraic relation. In the book, however, Fenchel offers a different approach to the unification of these formulae by considering a configuration in hyperbolic

3-space of which all the plane configurations are special cases. This configuration is the general right-angled geodesic hexagon in space. It is formed by any triplet of distinct geodesics and their pairwise common perpendiculars. After some preliminaries for this configuration in chapter V the reader will find a rich collection of trigonometric relations and theorems together with a careful study of the limiting cases in chapter VI. There are the theorems about the concurrence of the altitudes and the angular bisectors, the existence and uniqueness theorems for plane polygons with prescribed data etc. Each class of theorems is preceded by the corresponding theorem for the general right-angled hexagon.

Chapter VII deals with similar configurations, but now based upon points and planes. It ends with a paragraph on the geometry of hyperbolic tetrahedrons. Chapter VIII deals with the geometry of spherical surfaces that is, the spheres, the horospheres and the parallel surfaces. Many of the properties proved here are new in the literature. The book ends with a chapter on area and volume in which we find, for example, the computation of the volume of the orthoschemes. This has recently become an important tool in the study of hyperbolic three manifolds.

The book is rounded off by a number of historical remarks which follow each chapter and which lead the reader back to the original literature.

P. Buser

Die Werke von Jakob Bernoulli. Band 2: Elementarmathematik. Bearbeitet und kommentiert von Clara Silvia Roero und Tullio Viola †. XIII und 685 Seiten, Fr. 298.–. Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin 1989.

Im Rahmen der „Grossen Bernoulli-Edition“, die mit dem ersten Briefwechselband zu Johann I Bernoulli 1955 vom Editionsgründer Otto Spiess († 1966) eröffnet wurde, ist nun in der Werkreihe zu Jakob I Bernoulli der Band 2 erschienen, nachdem die Bände 1 (Jugendschriften zur Astronomie und Philosophia naturalis, ed. J. O. Fleckenstein) und 3 (Schriften zur Wahrscheinlichkeitslehre und Statistik, ed. B. L. van der Waerden) 1969 bzw. 1975 der Öffentlichkeit übergeben werden konnten.

Der nun vorliegende Band 2 ist Jakob Bernoullis Beiträgen zur sog. Elementarmathematik gewidmet; er enthält die Arbeiten zur Zahlentheorie im Anschluss an Fermat, zur klassischen synthetischen Geometrie und zur analytischen Geometrie im Kontext mit Descartes. Der Band wurde bearbeitet und kommentiert von C. S. Roero und T. Viola († 1985), was wohl der Hauptgrund dafür ist, dass als Editions- und Kommentarsprache das Italienische gewählt wurde – ein (allerdings nebensächlicher) Umstand, der von angelsächsischen, asiatischen und osteuropäischen Lesern trotz der auch in Englisch wiedergegebenen rund fünfzehnseitigen ‚General Introduction‘ von T. Viola als ein gewisses Handicap empfunden werden kann, besonders im Hinblick darauf, dass sowohl die „Introduzione“ zu den drei Hauptteilen des Bandes (Aritmetica, Geometria Sintetica, Geometria Algebraica) samt den Kommentaren und dreier angehängter Essays („Apendice“) mit grossem Gewinn (und Genuss!) zu lesen sind. Dies gilt ganz speziell für den – ebenfalls von C. S. Roero verfassten – „Appendice III“ über das ‚Florentiner Problem‘ von Viviani (das auch heute noch jedem Mathematiker bekannt sein sollte).

Das „sprachliche Handicap“ verliert jedoch seine Spitze, wenn man bedenkt, dass die meisten hier präsentierten Originaltexte Bernoullis bisher unveröffentlichte Teile aus seinem wissenschaftlichen Tagebuch, den (für Insider) schon zu Berühmtheit gelangten *Meditationes* darstellen und lateinisch abgefasst sind; wer nämlich in der Lage ist, den mathematischen Inhalt und das Bernoullische Latein zu bewältigen, wird auch mit den italienischen Kommentaren einigermassen zurechtkommen – auch ohne die Kultursprache Italienisch vollkommen zu beherrschen.

Die Fülle der Probleme und der zugehörigen Lösungsideen Jakob Bernoullis ist überwältigend, und der Fachmann weiss (der mathematikhistorische Amateur ahnt es, wenn er sich an einigen der ca. 25 Faksimile-Reproduktionen aus den *Meditationes* versuchen will), welche grosse Mühe und Meisterschaft erforderlich ist, derartige Texte nicht nur zu verstehen und zu durchdringen, sondern sie auch fehlerfrei zu transkribieren und in eine saubere Druckvorlage zu verwandeln. (Indes ist zu vermerken, dass die *Meditationes* im Vergleich zu andern Manuskripten Jakobs recht sorgfältig geschrieben und relativ leicht zu lesen sind.) Den Band beschliessen 50 Ss. Bibliographie, je ein gut führendes Personen- und Sachregister, ein Werkverzeichnis zu Jakob Bernoulli und ein hochwillkommener – und gut gelungener – Versuch einer Datierung der *Meditationes*-Artikel, an welchem – neben C. S. Roero – auch Patricia Radelet massgeblich beteiligt ist. – Die äussere Ausstattung dieses gewichtigen Buches entspricht dem hohen Standard, den man von Birkhäuser gewohnt ist.

Zu diesem Band, der einen weiteren bedeutsamen Schritt in einem Jahrhundertwerk darstellt, kann man der Bernoulli-Edition und allen beteiligten Mitarbeitern gratulieren. Das neue Opus dokumentiert erneut, dass die Geschichte der Wissenschaften als Forschungsdisziplin trotz des so oft beklagten defizienten Geschichtsbewusstseins unserer Epoche (noch) nicht abgestorben ist.

E. A. Fellmann

C. Niederberger: Geometrie für Sekundarschulen und Progymnasien. Schülerbuch: Band 1: 152 Seiten, Fr. 18.90 Band 2: 136 Seiten, Fr. 18.90. Band 3: 144 Seiten, Fr. 20.50. Lehrerausgabe: Band 1: 104 Seiten, Fr. 39.–. Band 2: 140 Seiten, Fr. 54.–. Band 3: 152 Seiten, Fr. 59.–. Sabe, Zürich 1988, 1989, 1990.

Der erste Teil dieses Lehrmittels wurde bereits in El. Math. Vol. 45, Nr. 1 besprochen. Mit der Publikation des dritten Bandes liegt es nun vollständig vor. Es behandelt in didaktisch vorbildlicher Weise die klassischen Themen der Schulgeometrie. Es öffnet aber auch – und dies zeichnet es ganz besonders aus – auf allen Stufen Zugänge zu weiteren geometrischen Aktivitäten. Dadurch werden Bezüge zu andern Fächern möglich, aber auch Ausblicke auf Bereiche der Mathematik, wie zum Beispiel die Topologie oder die Kombinatorik, welche üblicherweise auf der Sekundarstufe I kaum behandelt werden. Grosses Gewicht wird auch auf die Raumgeometrie gelegt. Wahl-Themen, insbesondere im dritten Band, erlauben dem Lehrer einen abwechslungsreichen Unterricht, zwingen ihn aber auch, wirklich etwas auszuwählen.

Die Lehrerbände im Format DIN A4 enthalten neben den Lösungen didaktische Hinweise und Kopiervorlagen für Arbeitsblätter und Hellraumprojektorfolien.

Ich bin überzeugt, dass das Unterrichtswerk eine wertvolle Hilfe zur Gestaltung eines zeitgemässen Geometrie-Unterrichts bietet.

H. Walser

K. Gödel: Collected Works. Volume I, Publications 1929–1936. Edited by S. Feferman. XVI und 474 Seiten, \$ 35.–, £ 27.50. Oxford University Press, New York – Clarendon Press, Oxford 1986.

Kurt Gödel ist ohne Zweifel der wichtigste und berühmteste Logiker des 20. Jahrhunderts. Seine Gesammelten Werke werden nun von einem Herausgeberkomitee der Association for Symbolic Logic unter der Leitung S. Fefermans herausgegeben. Der erste Band enthält die Publikationen von 1929 bis 1936, d. h. die meisten seiner Arbeiten zur mathematischen Logik. Der Rest seiner publizierten Arbeiten (vor allem die Arbeiten zur Konsistenz des Auswahlaxioms und der Kontinuumshypothese, sowie philosophische Schriften) wird im zweiten Band erscheinen, weitere Bände werden unpublizierte Manuskripte, Vorlesungen, Briefe sowie Auszüge aus Gödels Notizheften enthalten.

Der vorliegende erste Band, sehr sorgfältig ediert von S. Feferman, J. Dawson, S. Kleene, G. Moore, R. Solovay und J. van Heijenoort, ist sicher der wichtigste dieser Gesamtausgabe. Gödels berühmteste Arbeiten, insbesondere zur Vollständigkeit der Prädikatenlogik und zur Unvollständigkeit der Arithmetik, aber auch die meisten andern wichtigen Arbeiten zur mathematischen Logik, etwa zum Entscheidungsproblem, zur intuitionistischen Logik und Arithmetik und zu den Grundlagen der Berechnungstheorie sind hier zu finden, ausserdem eine Reihe von Rezensionen und Diskussionsbemerkungen. Alle Arbeiten sind im deutschen oder englischen Original wiedergegeben, den deutschen Artikeln ist jeweils eine englische Übersetzung beigelegt. Die wichtigen Arbeiten werden von ausgezeichneten einführenden Bemerkungen begleitet, welche Gödels Resultate in ihrem historischen Kontext erklären und sie auch für Nicht-SpezialistInnen zugänglich machen. Der ganze Band wird durch einen ausführlichen Aufsatz Fefermans über Gödels Leben und Werk eingeleitet.

Etwas unglücklich ist die von den Herausgebern gewählte, streng chronologische Reihenfolge der Arbeiten. Sie hat zur Folge, dass zusammengehörige Arbeiten auseinandergerissen werden; ausserdem wurden die Artikel zur Widerspruchsfreiheit des Auswahlaxioms und der Kontinuumshypothese in den zweiten Band verbannt, während sich im ersten Band eine Reihe von kurzen Rezensionen (manchmal nicht mehr als knappe Inhaltsangaben für das Zentralblatt) und Diskussionsbemerkungen von untergeordneter Bedeutung finden, von denen man etliche ohne Schaden auch ganz hätte weglassen können. Es wäre wohl für die meisten LeserInnen angenehmer gewesen, hätte man im ersten Band *alle* wichtigen Arbeiten Gödels zur mathematischen Logik aufgenommen, und statt dessen die unbedeutenden Rezensionen etc. auf einen späteren Band verschoben.

Trotzdem ist dieser erste Band der Gesamtausgabe sehr nützlich sowohl für LogikerInnen welche hier die meisten von Gödels, zum Teil nicht sehr zugänglichen Publikationen zur mathematischen Logik in einem Band vereinigt finden, wie auch für nicht spezialisierte InteressentInnen die hier, dank des biographischen Aufsatzes und der einleitenden Bemerkungen zu den wichtigen Artikeln, einen Zugang zu Gödel und seinem Werk finden können.

E. Grädel