**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 45 (1990)
**Heft:** 6

**Artikel:** Ein Satz über Eckentfernungen beim Dreieck
**Autor:** Stärk, R.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-42422

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

und

$$v_n = \operatorname{vol} V \leq \prod_{i=1}^{n} (\operatorname{vol} V_i)^{1/(n-1)} = v_{n-1}^{1/(n-1)}.$$

Hieraus folgt für ein beliebiges $k$-dimensionales Parallelotop $V_I$ die Ungleichung

$$\operatorname{vol} V_I \leq \left(\prod_{i \in I} \operatorname{vol} V_{I \setminus \{i\}}\right)^{1/(k-1)}.$$

Daraus schliesst man jetzt, dass

$$v_k = \prod_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \operatorname{vol} V_I \leq \prod_I \left(\prod_{i \in I} \operatorname{vol} V_{I \setminus \{i\}}\right)^{1/(k-1)} = \left(\prod_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\} \\ |J|=k-1}} \operatorname{vol} V_j\right)^{\frac{n-k+1}{k-1}}$$
$$= v_{k-1}^{\binom{n-1}{k-1}/\binom{n-1}{k-2}}, \quad 2 \leq k \leq n$$

und dies beweist die Ungleichung von Szasz.

S. B. Gaschkov,
Fakultät für Mechanik und Mathematik, Universität Moskau

Die vorliegende Arbeit wurde im Sommer-Semester 1988 während eines Gastaufenthaltes am Mathematischen Institut der Universität Zürich verfasst.

LITERATUR

1 Szasz O.: Über eine Verallgemeinerung des Hadamard'schen Determinantensatzes. Monatsschrift f. Math. und Phys. *28*, 253–257 (1917).
2 Beckenbach E., Bellmann E.: Inequalities. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1961.
3 Mirsky L.: On a Generalization of Hadamard's Determinantal Inequality due to Szasz. Archiv der Math. *8*, 274–275 (1957).
4 Marcus M., H. Minc: A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities. Ally and Bacon, Boston, 1964.
5 Hadwiger H.: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1957.

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/90/060153-03$1.50 + 0.20/0

# Elementarmathematik

## Ein Satz über Eckentfernungen beim Dreieck

Wir betrachten ein Dreieck $ABC$ mit den Seitenlängen $a, b, c$. Es sei $E$ irgend ein Punkt der Ebene, und $k_1, k_2, k_3$ seien drei aufeinander abgestimmte Zahlen, welche die Gleichung

$$\overline{EA}^2 + k_1 = \overline{EB}^2 + k_2 = \overline{EC}^2 + k_3 \tag{1}$$

erfüllen, wobei $\overline{EA}$, $\overline{EB}$, $\overline{EC}$ die Eckentfernungen des Punktes $E$ sind. Das zum Punkt $E$ gehörende Zahlentripel $(k_1, k_2, k_3)$ ist additiv homogen, statt $k_1, k_2, k_3$ kann man ebensogut $k_1 + q$, $k_2 + q$, $k_3 + q$, mit irgendeiner Zahl $q$, einsetzen.
Für den Höhenschnittpunkt $H$ gilt z. B.

$$\overline{HA}^2 + a^2 = \overline{HB}^2 + b^2 = \overline{HC}^2 + c^2. \tag{2}$$

Dies sieht man, wenn man die Dreiecksecken an den Mitten der Gegenseiten spiegelt. Andererseits hat man für den Inkreismittelpunkt $I$

$$\overline{IA}^2 - (s-a)^2 = \overline{IB}^2 - (s-b)^2 = \overline{IC}^2 - (s-c)^2,$$

wobei $s$ der halbe Dreiecksumfang ist. Addiert man hier allseitig den in $a$, $b$, $c$ symmetrischen Ausdruck $q = (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc):4$, so wird daraus, wegen $-(s-a)^2 + q = -bc$ etc.,

$$\overline{IA}^2 - bc = \overline{IB}^2 - ca = \overline{IC}^2 - ab. \tag{3}$$

Es soll nun gezeigt werden, dass das zum Punkt $E$ gehörende Zahlentripel $(k_1, k_2, k_3)$ nicht nur für $E$, sondern für alle Punkte der Geraden durch $E$ und den Umkreismittelpunkt $U$ des Dreiecks charakteristisch ist.
Es sei $P$ ein Punkt der Geraden $UE$, mit $\overrightarrow{UP} = \lambda \overrightarrow{UE}$.
Aus $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{UA} + \overrightarrow{PU} = \overrightarrow{UA} - \lambda \overrightarrow{UE}$ ergibt sich, wenn $r$ der Umkreisradius ist, $\overline{PA}^2 = r^2 - 2\lambda \overrightarrow{UA} \cdot \overrightarrow{UE} + \lambda^2 \overline{UE}^2$. Ebenso $\overline{PB}^2 = r^2 - 2\lambda \overrightarrow{UB} \cdot \overrightarrow{UE} + \lambda^2 \overline{UE}^2$, somit $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 2\lambda \overrightarrow{UE}(\overrightarrow{UB} - \overrightarrow{UA}) = 2\lambda \overrightarrow{UE} \cdot \overrightarrow{AB}$. Insbesondere für $P = E$, d. h. $\lambda = 1$, heisst dies $\overline{EA}^2 - \overline{EB}^2 = 2\overrightarrow{UE} \cdot \overrightarrow{AB}$. Ersetzt man $\overline{EA}^2 - \overline{EB}^2$ nach (1) noch durch $k_2 - k_1$, so bekommt man $\overline{PA}^2 + \lambda k_1 = \overline{PB}^2 + \lambda k_2$ und, weitergehend zur Ecke $C$,

$$\overline{PA}^2 + \lambda k_1 = \overline{PB}^2 + \lambda k_2 = \overline{PC}^2 + \lambda k_3. \tag{4}$$

Dass es zu einer vorgegebenen Zahl $\lambda$ nur *einen* Punkt $P$ gibt, der die Bedingung (4) erfüllt, dass also umgekehrt aus (4) auch $\overrightarrow{UP} = \lambda \overrightarrow{UE}$ folgt, zeigen die Fusspunkte der Lote von $P$ auf die Seiten des Dreiecks. Der Fusspunkt $F$ des Lotes auf $AB$ ist, wegen $\overline{FA}^2 - \overline{FB}^2 = \overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = \lambda(k_2 - k_1)$, durch $\lambda$ eindeutig bestimmt. Ebenso sind es die andern.

**Satz:** *Wenn bei einem Dreieck $ABC$, mit dem Umkreismittelpunkt $U$, für die Eckentfernungen $\overline{EA}$, $\overline{EB}$, $\overline{EC}$ eines Punktes $E$ die Gleichung*

$$\overline{EA}^2 + k_1 = \overline{EB}^2 + k_2 = \overline{EC}^2 + k_3$$

*gilt, dann sind für jeden Punkt $P$ die Aussagen*

$$\overrightarrow{UP} = \lambda \overrightarrow{UE}$$

*und*

$$\overline{PA}^2 + \lambda k_1 = \overline{PB}^2 + \lambda k_2 = \overline{PC}^2 + \lambda k_3$$

*äquivalent.*

Beispiele:

– Für die Punkte der Eulergeraden gilt, nach (2):

$$\overrightarrow{UP} = \lambda \overrightarrow{UH} \Leftrightarrow \overline{PA}^2 + \lambda a^2 = \overline{PB}^2 + \lambda b^2 = \overline{PC}^2 + \lambda c^2. \tag{5}$$

– Für die Punkte der Geraden $UI$ gilt, wegen (3):

$$\overrightarrow{UP} = \lambda \overrightarrow{UI} \Leftrightarrow \overline{PA}^2 - \lambda bc = \overline{PB}^2 - \lambda ca = \overline{PC}^2 - \lambda ab. \tag{6}$$

– Wir betrachten noch die Gerade durch $U$ und den Lemoinepunkt $L$. Der Lemoinepunkt (oder Symmedianenschnittpunkt [3] oder Grebepunkt [2]) ist bekanntlich der Punkt im Innern des Dreiecks, dessen Abstände $d_1, d_2, d_3$ von den Dreiecksseiten proportional zu diesen sind. Mit dem Ansatz $d_1 = \mu a, \ldots$ ergibt sich, wenn man die Inhalte der Teildreiecke $LAB$, $LBC$, $LCA$ zum Inhalt $J$ des Dreiecks $ABC$ aufsummiert: $\mu = 2J:(a^2 + b^2 + c^2)$. Es seien $Y$ und $Z$ die Fusspunkte der Lote von $L$ auf die Seiten $AC$ und $AB$. Dann ist $LA$ Umkreisdurchmesser des Dreiecks $LYZ$. Trigonometrisch ergibt sich

$$\overline{LA}^2 = \frac{\overline{YZ}^2}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}(d_2^2 + d_3^2 - 2d_2 d_3 \cos(180° - \alpha)) = \frac{b^2c^2(-a^2 + 2b^2 + 2c^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

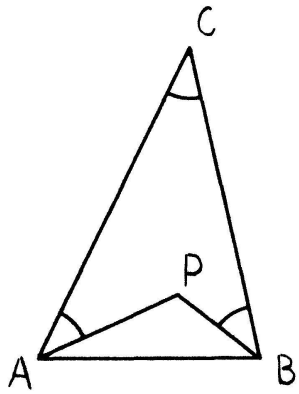
Subtrahiert man von $\overline{LA}^2$ den Ausdruck $2b^2c^2:(a^2 + b^2 + c^2)$, so erhält man den bei zyklischer Vertauschung invarianten Ausdruck $-3a^2b^2c^2:(a^2 + b^2 + c^2)^2$, folglich

$$\overrightarrow{UP} = \lambda \overrightarrow{UL} \Leftrightarrow \overline{PA}^2 - \lambda \frac{2b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \overline{PB}^2 - \lambda \frac{2c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \ldots. \tag{7}$$

Wie nützlich dieser Eckentfernungssatz bei verschiedenen Anwendungen sein kann, soll die folgende Auswahl zeigen.

*Anwendung 1*

*Bei einem Dreieck $ABC$ sei $P$ der Punkt, für welchen $\sphericalangle CBP = \sphericalangle PAC = \sphericalangle ACB$ ist (Fig. 1). Dieser Punkt $P$ liegt auf der Eulergeraden des Dreiecks.*




Figur 1.

Beweis:

Wir berechnen die Strecken $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ und zeigen, dass sich (5) erfüllen lässt. Beim Dreieck $PAB$, mit denWinkeln $\sphericalangle PBA = \beta - \gamma$, $\sphericalangle BAP = \alpha - \gamma$, $\sphericalangle APB = 3\gamma$ (Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung des Falles, wo $\gamma = \sphericalangle ACB$ der kleinste Winkel des Dreiecks $ABC$ ist. Das Endresultat ist in allen Fällen dasselbe), ist $\overline{PA} = \dfrac{c\sin(\beta-\gamma)}{\sin(3\gamma)}$.

Im Folgenden sollen bei allen Formeln jeweils möglichst nur die Seitenlängen $a$, $b$, $c$ des Dreiecks $ABC$ nebst allenfalls dem Umkreisradius $r$, dem Inkreisradius $\varrho$ und dem Inhalt $J$ vorkommen. Aus $\sin\beta = \dfrac{b}{2r}$, $\cos\beta = \dfrac{a^2-b^2+c^2}{2ac}$ etc., ergibt sich $\sin(\beta-\gamma) = \dfrac{b^2-c^2}{2ar}$ und $\sin(3\gamma) = 3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma = \dfrac{c(3r^2-c^2)}{2r^3}$, somit $\overline{PA} = \dfrac{(b^2-c^2)r^2}{a(3r^2-c^2)}$, und entsprechend $\overline{PB} = \dfrac{(a^2-c^2)r^2}{b(3r^2-c^2)}$. Bei der Berechnung von $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2$ wird die Formel $-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2 = 16J^2 = \dfrac{a^2b^2c^2}{r^2}$ benützt.

$$\begin{aligned}
\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 &= \frac{r^4}{(3r^2-c^2)^2}\left(\frac{(b^2-c^2)^2}{a^2} - \frac{(a^2-c^2)^2}{b^2}\right)\\
&= \frac{r^4}{a^2b^2(3r^2-c^2)^2}(-a^6+2a^4c^2-a^2c^4+b^6-2b^4c^2+b^2c^4)\\
&= \frac{r^4}{a^2b^2(3r^2-c^2)^2}(b^2-a^2)(3a^2b^2-16J^2) = \frac{(b^2-a^2)r^2}{3r^2-c^2}.
\end{aligned}$$

Das Dreieck $APC$ liefert $\overline{PC}^2 = \overline{PA}^2 + b^2 - 2\overline{PA}\,b\cos\gamma$. Mit Umformungen, wie vorhin, erhält man

$$\begin{aligned}
\overline{PC}^2 - \overline{PA}^2 &= b^2 - \frac{(b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)r^2}{a^2(3r^2-c^2)}\\
&= \frac{1}{a^2(3r^2-c^2)}(r^2(3a^2b^2-16J^2) - (b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)r^2)\\
&= \frac{(a^2-c^2)r^2}{3r^2-c^2},
\end{aligned}$$

und ebenso

$$\overline{PC}^2 - \overline{PB}^2 = \frac{(b^2-c^2)r^2}{3r^2-c^2}.$$

Daraus folgt

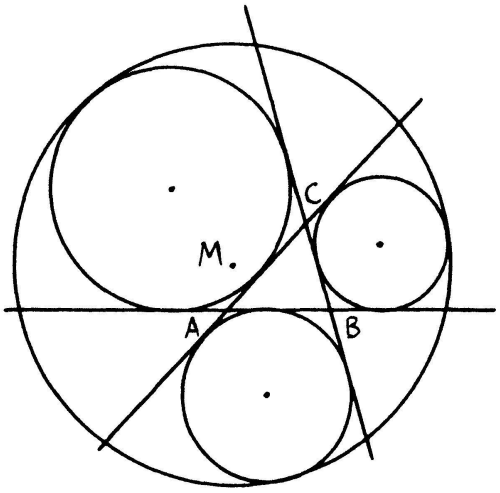
$$\overline{PA}^2 + \frac{r^2}{3r^2-c^2}a^2 = \overline{PB}^2 + \frac{r^2}{3r^2-c^2}b^2 = \overline{PC}^2 + \frac{r^2}{3r^2-c^2}c^2.$$

Das heisst: $P$ liegt auf der Eulergeraden, und es ist $\overrightarrow{UP} = \dfrac{r^2}{3r^2 - c^2}\overrightarrow{UH}$.

*Anwendung 2*

*Der Mittelpunkt $M$ des Kreises, der die drei Ankreise eines Dreiecks $ABC$, mit den Seitenlängen $a$, $b$, $c$, umschliessend berührt (Fig. 2), liegt auf der Geraden durch den Umkreismittelpunkt $U$ und den Lemoinepunkt $L$ des Dreiecks, und es gilt*

$$\overrightarrow{UM} = -\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{4abc}\overrightarrow{UL}.$$




Figur 2.

Beweis:

Gezeigt werden muss, nach (7), dass es eine Zahl $\lambda$ gibt, mit

$$\overline{MA}^2 - \lambda\frac{2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2} = \overline{MB}^2 - \lambda\frac{2c^2a^2}{a^2+b^2+c^2} = \dots. \tag{8}$$

Für die Berechnung der Eckentfernungen $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ werden zwei Hilfssätze benützt.

Hilfssatz 1:

*Bei einem Dreieck $PQR$ sei $V$ ein Punkt der Geraden $PQ$. Dann gilt*

$$\overline{RV}^2 = \frac{\overline{RP}^2\,\overline{VQ}^2 + \overline{QR}^2\,\overline{PV}^2}{\overline{PQ}} - \overline{PV}\cdot\overline{VQ}.$$

Auf die Herleitung dieser einfachen Formel kann verzichtet werden.

Hilfssatz 2:

*Wenn bei einem Dreieck $ABC$, mit den Seitenlängen $a$, $b$, $c$ und dem Inhalt $J$, für einen Punkt $P$ die Differenzen der Eckentfernungsquadrate $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = d_1$, $\overline{PA}^2 - \overline{PC}^2 = d_2$*

*bekannt sind, lässt sich die Eckentfernung $\overline{PA}$ mit der Formel*

$$\overline{PA}^2 = \frac{1}{16\,J^2}(b^2(c^2+d_1)^2 + c^2(b^2+d_2)^2 - (c^2+d_1)(b^2+d_2)(-a^2+b^2+c^2)) \quad (9)$$

berechnen.

Beweis:

Es seien $Y$ und $Z$ die Fusspunkte der Lote von $P$ auf die Geraden $AC$ und $AB$. Es ist

$$\overrightarrow{AZ} = \left(\overrightarrow{AP}\,\frac{\overrightarrow{AB}}{c}\right)\frac{\overrightarrow{AB}}{c} \quad \text{und} \quad \overline{PB}^2 = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB})^2 = \overline{PA}^2 + c^2 + 2\,\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AB},$$

somit $\overrightarrow{AZ} = \dfrac{c^2+d_1}{2\,c^2}\,\overrightarrow{AB}$. Ebenso $\overrightarrow{AY} = \dfrac{b^2+d_2}{2\,b^2}\,\overrightarrow{AC}$. Beim Dreieck $A\,Z\,Y$ liefern die trigonometrischen Sätze:

$$\overline{PA}^2 = \frac{\overline{YZ}^2}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}(\overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AY})^2$$

$$= \frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{(c^2+d_1)^2}{4\,c^2} + \frac{(b^2+d_2)^2}{4\,b^2} - 2\frac{(c^2+d_1)}{2\,c^2}\cdot\frac{(b^2+d_2)}{2\,b^2}\,b\,c\cos\alpha\right),$$

woraus die Formel sofort folgt.
Es seien nun $I_a$, $I_b$, $I_c$ die Ankreismittelpunkte des Dreiecks $ABC$ und $\varrho_a$, $\varrho_b$, $\varrho_c$ deren Radien, $\varrho$ der Inkreisradius und $r$ der Umkreisradius. Wir wenden beim Dreieck $I_b\,I_c\,M$ den Hilfssatz 1 an. Die Strecken $\overline{AI_b} = \varrho_b : \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ und $\overline{AI_c} = \varrho_c : \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ sind bekannt, nicht aber die andern, da der Radius $x$ des Kreises auch gesucht ist. Setzt man für $\overline{MI_b}^2$ und $\overline{MI_c}^2$ einfach $(x-\varrho_b)^2$ und $(x-\varrho_c)^2$ ein, so ergibt sich

$$\overline{MA}^2 = x^2 - \frac{4\,\varrho_b\,\varrho_c}{\varrho_b+\varrho_c}\,x + \varrho_b\,\varrho_c - \frac{\varrho_b\,\varrho_c}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Wegen $\varrho_b = \dfrac{J}{s-b}$, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{s(s-a)}{b\,c}$ und $J^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, wird daraus $\overline{MA}^2 = x^2 - \dfrac{b\,c}{r}\,x - (s-b)(s-c)$. Entsprechendes für $\overline{MB}$ und $\overline{MC}$. Nun kann der Hilfssatz 2 angewendet werden. Es ist

$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = \frac{c\,(a-b)}{r}\,x + (s-c)(b-a),\quad \overline{MA}^2 - \overline{MC}^2 = \frac{b\,(a-c)}{r}\,x + (s-b)(c-a).$$

Eingesetzt in (9), ergibt sich

$$16J^2\left(x^2-\frac{bc}{r}x-(s-b)(s-c)\right)$$
$$=b^2\left(c^2+\frac{c(a-b)}{r}x+(s-c)(b-a)\right)^2+c^2\left(b^2+\frac{b(a-c)}{r}\ x+(s-b)(c-a)\right)^2$$
$$-\left(c^2+\frac{c(a-b)}{r}x+(s-c)(b-a)\right)\left(b^2+\frac{b(a-c)}{r}x+(s-b)(c-a)\right)(-a^2+b^2+c^2),$$

eine quadratische Gleichung für $x$. Die Auflösung ist einfacher, als es scheint, denn eine Lösung, nämlich $-\frac{r}{2}$, ist bekannt (Feuerbach'scher Kreis). Mit Vieta kann die zweite, der Radius des hier gesuchten, umschliessend berührenden Kreises, berechnet werden. Nach einigen Umformungen ergibt sich

$$x=\frac{1}{8J}(a^2b+a^2c+ab^2+abc+ac^2+b^2c+bc^2). \tag{10}$$

Oben eingesetzt

$$\overline{MA}^2-\overline{MB}^2=\frac{c(a-b)}{8rJ}(\ldots)+(s-c)(b-a)=\frac{(a-b)}{2ab}((\ldots)-2ab(s-c))$$
$$=\frac{cs}{ab}(a^2-b^2)=\frac{acs}{b}-\frac{bcs}{a}.$$

Somit gilt

$$\overline{MA}^2+\frac{bcs}{a}=\overline{MB}^2+\frac{cas}{b}=\overline{MC}^2+\frac{abs}{c}.$$

Das ist die Zeile (8) mit dem Koeffizienten $\lambda=-s(a^2+b^2+c^2):2abc$, q.e.d.

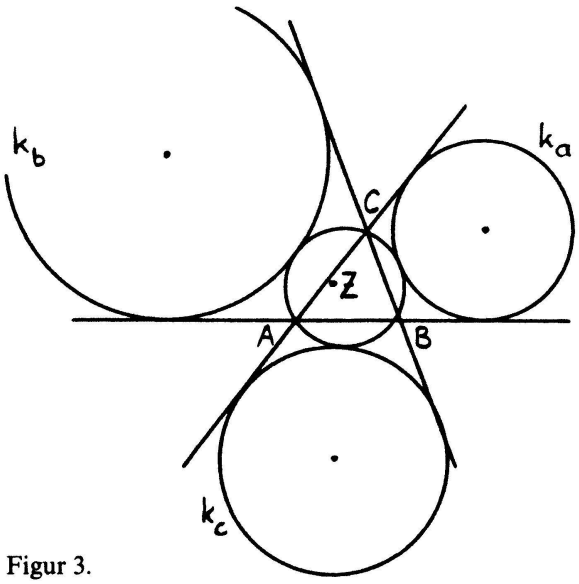
Es kann, unter Verwendung des Brocardwinkels $\omega$, auch $\lambda=-\frac{s\cot w}{2r}$ geschrieben werden, und für den Radius ist die Darstellung $x=\frac{s^2+\varrho^2}{4\varrho}$ möglich.

Weniger bekannt dürfte der folgende Satz sein.

*Anwendung 3*

*Bei einem Dreieck $ABC$ mit dem Umkreisradius $r$ und dem Inkreisradius $\varrho$ seien $k_a$, $k_b$, $k_c$ die drei Kreise, welche den Umkreis von aussen und je zwei Dreiecksseiten berühren (ohne die dritte Seite zu schneiden) (Fig. 3). Dann liegt das Potenzzentrum $Z$ von $k_a$, $k_b$, $k_c$ auf der Geraden durch den Umkreismittelpunkt $U$ und den Inkreismittelpunkt $I$ des Dreiecks, und es gilt*

$$\overrightarrow{UZ}=-\frac{2r}{2r-\varrho}\overrightarrow{UI}.$$




Figur 3.

Beweis:

Es seien, wie üblich, $a$, $b$, $c$ die Seitenlängen, $s$ der halbe Umfang und $J$ der Inhalt des Dreiecks. Der Radius $x_a$ des Kreises $k_a$ kann am besten mit Hilfe der Inversion am Kreis um $A$ mit dem Radius $\sqrt{bc}$ berechnet werden. Diese Inversion bildet $B$ in den Punkt $B^*$ auf $AB$, mit der Entfernung $b$ von $A$, ab. Entsprechend ist $\overline{AC^*} = c$. Das Dreieck $AC^*B^*$ ist dem Dreieck $ABC$ kongruent. Der Umkreis geht über in die Gerade $B^*C^*$, der Kreis $k_a$ in den Inkreis des Dreiecks $AB^*C^*$. Wenn $T$ der Berührungspunkt von $k_a$ mit $AB$ ist, ergibt sich aus $\overline{AT^*} = s - a$ sofort $\overline{AT} = \dfrac{bc}{s-a}$ und daraus

$$x_a = \frac{bc\varrho}{(s-a)^2}.$$

Es folgt hier übrigens auch unmittelbar, dass die Polare von $A$ bezüglich $k_a$ durch den Ankreismittelpunkt $I_a$ läuft, ein Satz von A. Mannheim [4].
Nun sollen für die weitere Rechnung Koordinaten zu Hilfe genommen werden, angemessenerweise baryzentrische. Dazu eine kurze

Zwischenbetrachtung:

1) Unter den baryzentrischen Koordinaten $(p_1/p_2/p_3)$ eines Punktes $P$, bezüglich eines Dreiecks $ABC$, versteht man das multiplikativ homogene Zahlentripel, verschieden von (0/0/0), das die Gleichung

$$p_1\overrightarrow{PA} + p_2\overrightarrow{PB} + p_3\overrightarrow{PC} = 0 \tag{11}$$

erfüllt [1]. Man kann $P$ auffassen als Schwerpunkt der mit den Gewichten $p_1, p_2, p_3$ versehenen Punkte $A$, $B$, $C$. Für den Vektor $\overrightarrow{QP}$ von irgendeinem Punkt $Q$ zum Punkt $P(p_1/p_2/p_3)$ gilt

$$\overrightarrow{QP} = \frac{p_1\overrightarrow{QA} + p_2\overrightarrow{QB} + p_3\overrightarrow{QC}}{p_1 + p_2 + p_3}, \tag{12}$$

denn es ist

$$p_1\overrightarrow{QA} + p_2\overrightarrow{QB} + p_3\overrightarrow{QC} = p_1\overrightarrow{QA} + p_2\overrightarrow{QB} + p_3\overrightarrow{QC}$$
$$-(p_1\overrightarrow{PA} + p_2\overrightarrow{PB} + p_3\overrightarrow{PC}) = p_1\overrightarrow{QP} + p_2\overrightarrow{QP} + p_3\overrightarrow{QP}.$$

Die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes $P$ sind proportional zu den (orientierten) Inhalten der Dreiecke $PBC$, $PCA$, $PAB$. Dies folgt aus

$$p_3(\overrightarrow{PB} \times \overrightarrow{PC}) = \overrightarrow{PB} \times (-p_1\overrightarrow{PA} - p_2\overrightarrow{PB})$$
$$= -p_1(\overrightarrow{PB} \times \overrightarrow{PA}) = p_1(\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}) \text{ etc.}$$

Beispielsweise hat der Dreiecksschwerpunkt $S$, wegen der Inhaltsgleichheit der Teildreiecke $SBC$, $SCA$, $SAB$, die Koordinaten (1/1/1). Der Inkreismittelpunkt $I$ hat die Koordinaten $(a/b/c)$, der Ankreismittelpunkt $I_a$ die Koordinaten $(-a/b/c)$; man achte auf den Umlaufsinn der Dreiecke.
Bei Berechnungen ist es häufig nützlich, das baryzentrische Koordinatentripel $(p_1/p_2/p_3)$ noch durch $p_1 + p_2 + p_3$ zu dividieren, also so zu normieren, dass die Koordinatensumme gleich 1 wird: $S\left(\frac{1}{3}\Big/\frac{1}{3}\Big/\frac{1}{3}\right)$, $I\left(\frac{a}{2s}\Big/\frac{b}{2s}\Big/\frac{c}{2s}\right)$.
2) Wenn die Eckentfernungen $\overline{ZA}$, $\overline{ZB}$, $\overline{ZC}$ eines Punktes $Z$ bekannt sind, lässt sich seine Entfernung von einem beliebigen Punkt $P(p_1/p_2/p_3)$, dessen baryzentrische Koordinaten normiert sind $(p_1 + p_2 + p_3 = 1)$, mit der folgenden wichtigen Formel berechnen:

$$\overline{ZP}^2 = p_1\overline{ZA}^2 + p_2\overline{ZB}^2 + p_3\overline{ZC}^2 - (a^2 p_2 p_3 + b^2 p_3 p_1 + c^2 p_1 p_2). \tag{13}$$

Beweis:

Aus (11) folgt, immer unter Berücksichtigung der Normiertheit,

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP} + (1 - p_2 - p_3)\overrightarrow{PA} + p_2\overrightarrow{PB} + p_3\overrightarrow{PC} = p_2\overrightarrow{AB} + p_3\overrightarrow{AC}.$$
$$\overline{PA}^2 = p_2^2 c^2 + 2p_2 p_3 b c \cos\alpha + p_3^2 b^2 = p_2^2 c^2 + p_2 p_3(-a^2 + b^2 + c^2) + p_3^2 b^2.$$
$$p_1\overline{ZA}^2 + p_2\overline{ZB}^2 + p_3\overline{ZC}^2 = p_1(\overrightarrow{ZP} + \overrightarrow{PA})^2 + \ldots.$$

(Die Punkte stehen für die weiteren Glieder, die aus dem ersten durch zyklische Vertauschung hervorgehen)

$$= p_1(\overline{ZP}^2 + 2\overrightarrow{ZP} \cdot \overrightarrow{PA} + \overline{PA}^2) + \ldots = \overline{ZP}^2 + (p_1\overline{PA}^2 + \ldots)$$
$$= \overline{ZP}^2 + ((p_1 p_2^2 c^2 + p_1 p_2 p_3(-a^2 + b^2 + c^2) + p_1 p_3^2 b^2) + \ldots).$$

Es muss noch nach $a^2$, $b^2$, $c^2$ geordnet werden.

$$= \overline{ZP}^2 + p_2 p_3 a^2 + p_3 p_1 b^2 + p_1 p_2 c^2, \quad \text{q.e.d.}$$

Z. B. ergibt sich für die Strecke $\overline{UI}$ die bekannte Euler'sche Formel

$$\overline{UI}^2 = \frac{a}{2s} r^2 + \ldots - \left(a^2 \frac{b}{2s} \frac{c}{2s} + \ldots\right) = r^2 - \frac{abc}{2s} = r^2 - 2r\varrho .$$

Ende der Zwischenbetrachtung.

Der Mittelpunkt $M_a$ des Kreises $k_a$ hat die Koordinaten

$$\left(J - \frac{b x_a}{2} - \frac{c x_a}{2} \Big/ \frac{b x_a}{2} \Big/ \frac{c x_a}{2}\right) = \left(1 - \frac{b x_a}{2J} - \frac{c x_a}{2J} \Big/ \frac{b x_a}{2J} \Big/ \frac{c x_a}{2J}\right).$$

Entsprechend zyklisch

$$M_b\left(\frac{a x_b}{2J} \Big/ 1 - \frac{c x_b}{2J} - \frac{a x_b}{2J} \Big/ \frac{c x_b}{2J}\right), \quad x_b = \frac{c a \varrho}{(s-b)^2}, \quad \text{etc.}$$

Gibt es nun auf der Geraden $UI$ einen Punkt $Z$, der die Potenzbedingung

$$\overline{ZM_a}^2 - x_a^2 = \overline{ZM_b}^2 - x_b^2 = \overline{ZM_c}^2 - x_c^2 \tag{14}$$

erfüllt? Nach (6) erfüllt $Z$, wenn $\overrightarrow{UZ} = \lambda \overrightarrow{UI}$ ist, die Gleichung

$$\overline{ZA}^2 - \lambda bc = \overline{ZB}^2 - \lambda ca = \overline{ZC}^2 - \lambda ab . \tag{15}$$

Nach (13) ist

$$\begin{aligned} \overline{ZM_a}^2 = {} & \left(1 - \frac{b x_a}{2J} - \frac{c x_a}{2J}\right)\overline{ZA}^2 + \frac{b x_a}{2J}\overline{ZB}^2 + \frac{c x_a}{2J}\overline{ZC}^2 \\ & - \left(a^2 \frac{b c x_a^2}{4J^2} + b^2(\ldots)\frac{c x_a}{2J} + c^2(\ldots)\frac{b x_a}{2J}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Setzt man, gemäss (15), für $\overline{ZA}^2$, $\overline{ZB}^2$, $\overline{ZC}^2$ hier $k + \lambda bc$, $k + \lambda ca$, $k + \lambda ab$ ein, wobei $k$ die nicht weiter bekannte Konstante der Zeile (15) ist, und geht man mit (16) in (14), so erhält man eine (zyklisch fortlaufende) Gleichung für $\lambda$. Es genügt vorerst, nur den vorderen Teil von (14): $\overline{ZM_a}^2 - x_a^2 = \overline{ZM_b}^2 - x_b^2$ zu betrachten. Die Auflösung nach $\lambda$ ergibt nach kurzer Umformung – dass $k$ herausfällt, ist schnell ersichtlich – den Ausdruck

$$\lambda = \frac{x_a^2 bc\left(a^2 + \left(\frac{2J}{x_a} - b - c\right)(b+c)\right) - x_b^2 ac\left(b^2 + \left(\frac{2J}{x_b} - c - a\right)(a+c)\right) + 4J^2(x_a^2 - x_b^2)}{2Jc\left(b x_a\left(\frac{2J}{x_a} + 2a - b - c\right) - a x_b\left(\frac{2J}{x_b} + 2b - a - c\right)\right)}.$$

Nachdem man für die Radien eingesetzt hat, bleibt nur nachzuweisen, dass dieserAusdruck symmetrisch ist in $a$, $b$, $c$, das heisst invariant bei zyklischer Vertauschung der

Seiten. Dies bedeutet dann, dass mit diesem $\lambda$, wie gewünscht, die ganze Zeile (14) erfüllt werden kann. Ohne Computerunterstützung wieder eine etwas mühsame Umformung. Das Resultat:

$$\lambda = \frac{-4abc}{a^3 - a^2b - a^2c - ab^2 + 6abc - ac^2 + b^3 - b^2c - bc^2 + c^3}$$

$$= \frac{-4abc}{4abc - 8(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{-abc}{abc - 2s\varrho^2} = -\frac{2r}{2r - \varrho}.$$

Damit reiht sich der Punkt $Z$ würdig in die Gesellschaft der besonderen Punkte des Dreiecks ein.

Die Kollinearität der Punkte $Z$, $U$, $I$ lässt sich auch auf andere Weise nachweisen. Der hier beschrittene Weg hat den Vorteil, dass er die genaue Lage von $Z$ auf $UI$ liefert und dass damit für weiterführende Rechnungen allfällig Verhältnisse, Streckenlängen usw. zur Verfügung stehen.

So kann z. B. auch der Kreis berechnet werden, der die drei Kreise $k_a$, $k_b$, $k_c$ nicht wie der Umkreis von aussen, sondern umschliessend berührt. Sein Mittelpunkt $V$ liegt auch auf $UI$, man denke an die Inversion am Orthogonalkreis von $k_a$, $k_b$, $k_c$. Sein Radius ist $\frac{r(4r - 3\varrho)}{\varrho}$, und es gilt $\overrightarrow{UV} = -\frac{4r}{\varrho}\overrightarrow{UI}$.

Interessant ist ferner das Dreieck $A'B'C'$, gebildet durch die drei äusseren gemeinsamen Tangenten der Kreise $k_a$, $k_b$, $k_c$. Es ist zentralkollinear zum Dreieck $ABC$. Die äussere Ähnlichkeitsgerade von $k_a$, $k_b$, $k_c$ ist die Kollineationsachse. Das Kollineationszentrum liegt – wieder eine Merkwürdigkeit – auch auf der Geraden $UI$, es ist der Schnittpunkt von $UI$ mit der Geraden durch den Schwerpunkt und den Gergonnepunkt des Dreiecks $ABC$.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass man zu analogen Resultaten gelangt, wenn man als Kreise $k_a$, $k_b$, $k_c$ nicht die den Umkreis von aussen berührenden Seitenberührkreise nimmt, sondern diejenigen innen. Auch ihr Potenzzentrum liegt auf der Geraden $UI$.

R. Stärk, Kantonsschule Schaffhausen

LITERATUR

1 Coxeter H. S. M.: Unvergängliche Geometrie. Birkhäuser, Basel 1963.
2 Donath E.: Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976.
3 Johnson R. A.: Advanced Euclidean Geometry. Dover Publications New York 1960.
4 Simon M.: Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert, p. 138. B. G. Teubner, Leipzig 1906.

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/90/060155-11$1.50 + 0.20/0