Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 45 (1990)
Heft: 5

Rubrik: Kleine Mitteilung

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

wird und $2m/(1+u)-(m-1)$ beträgt. Weiter ist $\sigma'(\alpha_0)=2mf'(\alpha_0)-(m-1)=0$, d. h. $f'(\alpha_0)=(m-1)/2m$. Auf $[0,\alpha_0)$ ist $\sigma\geq 0$ (weil $\sigma'>0$) und $\sigma\leq\alpha$ (weil $f'\leq\frac{1}{2}$, somit $\sigma'\leq m-(m-1)=1$). Da die Klammer von (3.17) monoton mit σ und σ monoton mir α wächst, wird ihr Maximum in α_0 erreicht. Es beträgt, wegen $\sigma(\alpha_0)\leq\alpha_0$, höchstens $\frac{1}{2}-f'(\alpha_0)=1/2m$. Insgesamt bleibt also der Ausdruck in (3.17) kleiner als

$$\left[\frac{2m}{1+u}-(m-1)\right]\cdot\frac{1}{2m}-\frac{1}{2m}=\frac{1-u}{2(1+u)}<0.$$

Damit ist der Beweis beendet. Dieses letzte Beispiel lehrt, dass man starke Symmetrieeigenschaften des Graphen postulieren muss, um die Nullstellen an $\mathbb{R}_-$ oder mindestens $\mathbb{R}_-\cup S_1$ zu binden. Für weitere Diskussionen vgl. [2] und [3].

Irene Hueter und Henri Carnal
Institut für mathematische Statistik, Universität Bern

LITERATURVERZEICHNIS

1 Onsager L.: Crystal Statistics I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition. Phys. Rev. *65*, 117 (1944).
2 Peitgen H.-O., Richter P. H.: The Beauty of Fractals. Springer Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1986.
3 V. Saarloos W., Kurtze D. A.: Location of zeros in the complex temperature plane. Absence of Lee-Yang theorem. J. Phys. *A 17*, 1301 (1984).
4 Yang C. N., Lee T. D.: Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions I, II. Phys. Rev. *87*, 404, 410 (1952).

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/90/050130-08$1.50 + 0.20/0

Kleine Mitteilung

On a problem by Shapiro

In 1954, H. S. Shapiro proposed the following problem: determine the minimum of the cyclic sum

$$S_n(a)=\sum_{i=1}^{n} a_i/(a_{i+1}+a_{i+2}), \tag{1}$$

with $a_i\geq 0$ and $a_i+a_{i+1}>0$ ($a_{n+1}=a_1$, $a_{n+2}=a_2$). He conjectured that this minimum is $n/2$. This is known to be true for $n\leq 13$, but false for $n\geq 14$ (see [1] for reference, and the range $15\leq n\leq 23$, n odd).

In the present work we propose a method which enables us to solve the problem for $n<7$. The method is based on an application of Fourier transformation to functions of discrete argument.

We denote

$$S = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2}$$

$$\alpha_i = \frac{n a_i}{\sum_{k=1}^{n} a_k} - 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Then

$$\alpha_i > -1, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 0 \tag{2}$$

and

$$2S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 + \alpha_k}{1 + \frac{\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}}{2}}, \quad \alpha_{n+1} = \alpha_1, \ \alpha_{n+2} = \alpha_2.$$

For $x > -1$, $(1 + x)^{-1} \geq 1 - x$, the equality being valid only for $x = 0$.
It follows

$$2S \geq \sum_{k=1}^{n} (1 + \alpha_k)\left(1 - \frac{\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}}{2}\right) = n - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) \equiv n - \frac{A}{2}. \tag{3}$$

We introduce a real valued function $f(x)$, such that

$$f(k) = \alpha_k \quad \text{for} \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{and} \quad f(k) = f(n + k).$$

From (2) it follows

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = 0. \tag{4}$$

We represent $f(x)$ by a Fourier trigonometric polynomial

$$f(k) = \sum_{m=1}^{n} q(m) \exp\left(2\pi i \frac{mk}{n}\right), \tag{5}$$

where

$$q(m) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k) \exp\left(-2\pi i \frac{mk}{n}\right) \tag{6}$$

Bearing in mind that $f(x)$ is real valued, we obtain

$$q(n - m) = \overline{q(m)}. \tag{7}$$

Besides, from (5) and (6) it follows

$$q(n+m) = q(m), \quad q(n) = 0. \tag{8}$$

Now, the sum A can be represented as follows

$$A = n \sum_{k=1}^{n} q(n-k)\, q(k) \left(\cos \frac{2\pi}{n} k + \cos \frac{4\pi}{n} k \right)$$
$$+ i n \sum_{k=1}^{n} q(n-k)\, q(k) \left(\sin \frac{2\pi}{n} k + \sin \frac{4\pi}{n} k \right).$$

Because of (7) and (8), we have (A being real)

$$A = n \sum_{k=1}^{n-1} q(n-k)\, q(k) \left(\cos \frac{2\pi}{n} k + \cos \frac{4\pi}{n} k \right).$$

Hence, by (3) and (7) it follows

$$S \geq \frac{n}{2} - \frac{n}{4} \sum_{k=1}^{n-1} |q(k)|^2 \left(\cos \frac{2\pi}{n} k + \cos \frac{4\pi}{n} k \right). \tag{9}$$

The function $\cos x + \cos 2x$ is non-positive for $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$. Thus the second term of the last inequality (9) is non-negative for every $1 \leq k < n$ and $n < 7$.
Thus (1) is proved for $n < 7$.
The equality in (1) is obtained if and only if

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3 = \ldots = \alpha_{n-1} + \alpha_n = \alpha_n + \alpha_1 = 0.$$

For $n = 3, 5$ the last system has the following solution:

$$\alpha_k = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

For $n = 4, 6$

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5; \quad \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 \quad \text{and hence}$$

$$\alpha_k = (-1)^k \alpha, \quad |\alpha| < 1.$$

Evgenii S. Freidkin, University of the Witwatersrand, Johannesburg
Solomon A. Freidkin, Technion-Israel Institute of Technology, Haifa

REFERENCES

[1] Troesch B. A.: The validity of Shapiro's cyclic inequality, Math. Comp. *53*, 657–664 (1989).

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/90/050137-03$1.50 + 0.20/0