

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 45 (1990)
Heft: 5

Artikel: Friedrich Riesz als Wegbereiter der Funktionalanalysis
Autor: Kreyszig, Erwin
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-42418>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Vol. 45

Nr. 5

Seiten 117–144

Basel, September 1990

Friedrich Riesz als Wegbereiter der Funktionalanalysis *

Herrn Prof. Dr. Leopold Vietoris zum 99. Geburtstag am 4. Juni 1990 in Ergebenheit und Freundschaft gewidmet

1. Einleitung

Ohne Zweifel gehört Friedrich Riesz (Riesz Frigyes, 1880–1956) zusammen mit Fréchet, Hilbert und Banach zu den Hauptbegründern und Führern während der ersten Jahrzehnte der Entwicklung der Funktionalanalysis. Wir stellen uns hier die Aufgabe, aus zum Teil wenig bekannten charakteristischen Einzelheiten des Rieszschen funktionalanalytischen Schaffens ein Gesamtbild zu entwerfen, das es wegen der grossen Bedeutung der Rieszschen Arbeiten verdient, in weiteren Kreisen bekannt zu werden [1*]. Im Auge behalten wollen wir dabei die vier folgenden, in der Reihenfolge steigender Wichtigkeit angegebenen Gesichtspunkte:

1. *Die lange Zeitspanne, 1906–1942*, der funktionalanalytischen Aktivität, lang sowohl im Vergleich zur Arbeit anderer wie auch im Rieszschen Gesamtwerk (s. Fig. 1). Auf diese folgt 10 Jahre später noch das berühmte, mit B. Szökefalvi-Nagy verfasste Buch [12].

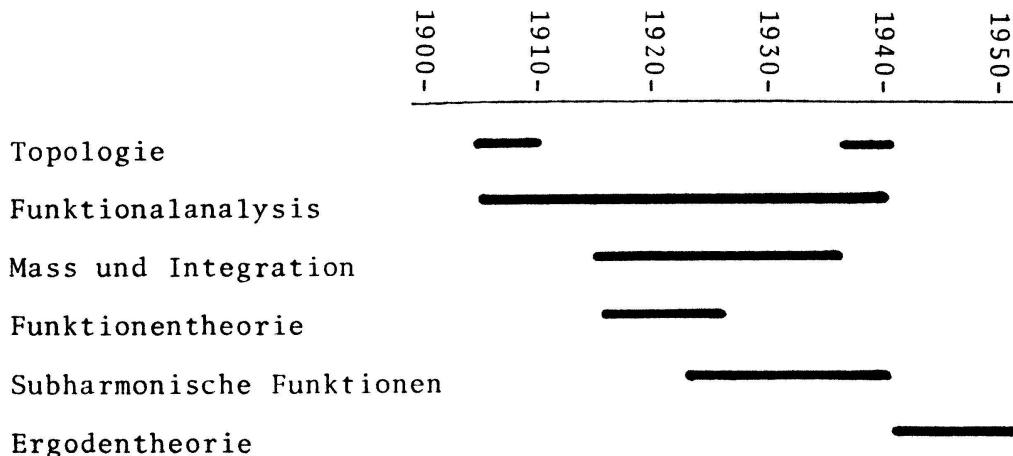


Fig. 1. Zeitliche Gliederung der Arbeiten von Friedrich Riesz nach Gebieten [2*].

* Nach einem Vortrag, gehalten auf dem XII. Österreichischen Mathematikerkongress in Wien 1989. Anregungen dazu verdankt der Verfasser den Herren M. Riesz und T. Radó, mit denen er in Stanford bzw. Columbus länger zusammen war.

2. Die klare, abgerundete Darstellung – Rieszs Beweise sind kaum jemals wesentlich verbessert worden –, die das Lesen der Originalarbeiten auch heute noch zum empfehlenswerten Genuss macht. Um dies wenigstens anzudeuten, werden wir Riesz im Rahmen des verfügbaren Platzes möglichst oft selbst zu Worte kommen lassen.

3. Der lebendige Kontakt mit Göttingen und Paris, den beiden damaligen Zentren der Funktionalanalysis unter Hilbert und seiner Schule bzw. unter Hadamards, Fréchets und Lebesgues Führung, die Riesz vor anderen auszeichnet und erheblich zur Vereinheitlichung der aus heterogenen Quellen entsprungenen Funktionalanalysis beigetragen hat und ebenso zu einer rascheren Verbreitung der Lebesgueschen Theorie, die ja selbst in Frankreich zunächst auf erheblichen Widerstand gestossen ist – Hermite verweigerte die Annahme von Lebesgues C.R. Paris-Noten [3*].

4. Die Tiefe und Vielseitigkeit seiner grundlegenden, zum grossen Teil bahnbrechenden Arbeiten, die auf die moderne Analysis den grössten Einfluss ausgeübt haben.

2. Zum Lebenslauf

Unter Benutzung persönlicher Mitteilungen und [5, 7, 11, 13] erwähnen wir hier nur Tatsachen und Umstände, die für Rieszs mathematisches Schaffen besondere Bedeutung hatten. Geboren am 22. 1. 1880 in Györ (Raab) als Sohn eines Arztes, wuchs Riesz zusammen mit seinem 6 Jahre jüngeren Bruder Marcel in der kulturellen Atmosphäre dieser «Königlichen Freistadt» von damals etwa 35 000 Einwohnern in der Nähe Budapests auf. Er begann sein Ingenieurstudium am Eidgenössischen Polytechnikum (der heutigen ETH) Zürich im Jahre des Züricher Ersten Internationalen Mathematikerkongresses 1897, wechselte aber bald zum Mathematikstudium über, das er an der Universität Budapest fortsetzte und 1902 mit dem Doktorat abschloss. Im gleichen Jahr promovierte Lebesgue in Paris mit seiner berühmten Thèse de Doctorat, mit der er die überaus folgenreiche Entwicklung des Lebesgue-Integrals einleitete. Dagegen fand Rieszs Dissertation [4*] aus der projektiven Geometrie (s. [11], 1349–94, 1529–57) kaum Widerhall. Umso bemerkenswerter ist es, wie bald und konsequent sich Riesz in eine ganz andere, «moderne topologisch-funktionalanalytische» Arbeitsrichtung wandte und binnen eines Jahrzehnts, von 1907 bis 1916, einen grossen Erfolg nach dem anderen erzielte. Entscheidend für diese Wendung war ein einjähriger Aufenthalt vor der Promotion in dem damals gerade aufblühenden Göttingen, wo es ihm gelang, mit Hilbert (der 1895 dorthin berufen worden war) engen Kontakt zu schliessen und später auch Freundschaft mit E. Schmidt und H. Weyl.

Ähnlich wie seinerzeit Weierstrass begann Riesz nach Erlangung des Lehrerdiploms ab 1904 seine Berufslaufbahn an einer Oberschule, und zwar in der «Königlichen Freistadt» Leutschau (Löcse), und war 1908–12 in gleicher Stellung in Budapest, bis er im Alter von 32 Jahren seinen ersten Ruf erhielt. Ganz erstaunlich ist es, dass Riesz unter diesen sicher nicht leichten Bedingungen über die Hälfte seiner epochenmachenden funktionalanalytischen Entdeckungen während dieser ersten 10 Jahre nach seiner Promotion publizierte, wie wir noch im einzelnen sehen werden. Denn wenn auch Leutschau als Hauptstadt des Zipser Komitats und «Vorort» der 24 deutschen Zipser Städte mit seiner 665-jährigen Vergangenheit lange Zeit die blühendste Stadt Nordungarns war, so war es doch mit damals etwa 7000 (meist deutschen) Einwohnern und seiner abseitigen Lage

wohl keine ideale Stätte für wissenschaftliche Arbeit mit internationalem Gedankenaustausch, und auch in Budapest dürften Riesz's Arbeitsmöglichkeiten zwar besser, aber immer noch recht bescheiden gewesen sein.

Die weiteren Stationen seines Lebens können wir kurz kennzeichnen durch einige wenige Hauptereignisse, nämlich seinen schon erwähnten ersten Ruf von 1912 als a.o. Professor nach Klausenburg (Cluj), wo er 1914 zum Ordinarius ernannt wurde und tätig war, bis Klausenburg 1918 zu Rumänien geschlagen wurde, durch zwei Übergangsjahre in Budapest, dann durch seine wohl schönste Periode 1920–46 an der neuen Universität Szeged, wo er zusammen mit dem Hilbert-Schüler und Klausenburger Kollegen A. Haar (1885–1933) das später nach Bolyai benannte Mathematische Institut aufbaute, bis ihn ein Ruf an die Universität Budapest erreichte, wo er die letzten 10 Jahre seines Lebens verbrachte und am 28. 2. 1956 verstarb.

Damit sind wir so weit, dass wir uns den einzelnen fundamentalen funktionalanalytischen Rieszschen Arbeiten zuwenden können.

3. Der Riesz-Fischer-Satz (1907)

«**Hauptsatz:** Es sei $\{\varphi_i(x)\}$ ein normiertes Orthogonalsystem integrierbarer Funktionen von integrierbarem Quadrate, die für ein Intervall $a b$ definiert sind; d. h. ein System, für welches

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0 \quad (i \neq j) \quad \text{und} \quad \int_a^b (\varphi_i(x))^2 dx = c^2$$

und zwar für jede Funktion des Systems. Ordnen wir jeder Funktion des Systems eine Zahl a_i zu. Dann ist die Konvergenz von $\sum a_i^2$ eine notwendige und zugleich hinreichende Bedingung dafür, damit es eine integrierbare Funktion $f(x)$ von integrierbarem Quadrate gebe, so dass

$$\int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx = a_i$$

sei für jede Funktion $\varphi_i(x)$ und jede Zahl a_i .»

Dies ist die Rieszsche Formulierung aus den Göttinger Nachrichten von 1907, 116–22. Wir sagen heute, der *Hilbertsche Folgenraum* ℓ^2 , dessen «Punkte» Zahlenfolgen $a = (a_i)$ mit konvergenter Reihe $\sum a_i^2$ sind, ist *isometrisch isomorph* zu dem *Lebesgueschen Funktionsraum* $L^2[a, b]$, dessen «Punkte» Äquivalenzklassen von auf $[a, b]$ messbaren Funktionen f mit endlichem Lebesgue-Integral $\int_a^b f^2 dx$ [und $f \sim g \Leftrightarrow \int_a^b (f - g)^2 dx = 0$] sind, und man erhält die Isomorphie durch die «Fourierkoeffizienten» $a_i = \int_a^b f \varphi_i dx$ von f bezüglich eines vollständigen Orthonormalsystems $\{\varphi_i\}$.

Die überragende Bedeutung dieses Satzes besteht darin, dass er eine unerwartete Brücke zwischen zwei ganz verschiedenen Gebieten schlägt, Hilberts Integralgleichungen und Lebesgues Integrationstheorie, die damals noch immer um ihre Anerkennung ringt und sich Riesz als den nächst Lebesgue eifrigsten Vorkämpfer erwirbt. Weiterhin – dies nennt

Dieudonné [2], 120, die wichtigste Folge – bahnt der Satz den Weg zu den L^p -Räumen (s. Abschn. 6) und damit zur allgemeinen Theorie der normierten Räume.

Die hochinteressante *Entdeckungsgeschichte des Satzes* führt uns in den Schnittpunkt der Ideen fast aller Schöpfer der Funktionalanalysis in statu nascendi. Darüber lassen wir Riesz durch seine Arbeiten und seine Erinnerungen (s. [11], 327) selbst berichten: Riesz kannte die Idee des ℓ^2 (intuitiv die Ausdehnung der Euklidischen Metrik auf abzählbar unendlich viele Dimensionen) aus Hilberts Mitteilungen über Integralgleichungen (1904–10; s. [6]), von denen die 4. Mitteilung (1906) hier am wichtigsten ist, indem sie den Beginn der Spektraltheorie im *funktionalanalytischen* Sinn bezeichnet, die erste *abstrakte* Arbeit über Integralgleichungen und die Grundlage der (später von Riesz formulierten) Theorie der stetigen linearen Operatoren (s. Abschn. 7). Auf Lebesgue war Riesz zuerst durch dessen Buch über trigonometrische Reihen von 1906 aufmerksam geworden und hatte dann auch dessen Buch über Integration (1904) und die Thèse von 1902 durchgearbeitet. Ebenso kannte er Fréchets axiomatische Definition des metrischen Raumes aus dessen Thèse [3] von 1906. Angeregt durch E. Schmidts Satz von 1905, dass jedes vollständige Orthonormalsystem auf $[0, 1]$ stetiger Funktionen abzählbar unendlich ist, verbindet Riesz schon 1906 Fréchets und Lebesgues Ideen, indem er [C. R. Paris 143, 738–41] den $L^2[a, b]$ definiert und dessen Separabilität [5*] beweist, also die erweiterte Gültigkeit des Schmidtschen Satzes. Für die Distanz schreibt er dabei

$$d(f_1, f_2) = \sqrt{\int (f_1 - f_2)^2}.$$

«[Aber] die Idee und der Mut zu versuchen, den Integralbegriff auf Probleme anzuwenden, mit denen ich mich gerade beschäftigte, kamen mir erst 1906 beim Lesen der ausgezeichneten Arbeit [*l'excellent Mémoire*] von Fatou [dessen Thèse; Acta Math. 30, 335–400], insbesondere des Fatouschen Lemmas ..., das die Unterhalb-Stetigkeit der ... Integration besagt und das mir im Februar 1907 ... half, den [Riesz-Fischer-] Satz zu beweisen.»

Aus den Göttinger Nachrichten wissen wir weiter, dass Hilbert am 9. März im Seminar über den Satz vortrug. Aber 4 Tage eher (!) hatte schon Fischer in Brünn über praktisch dasselbe, von ihm unabhängig gefundene Ergebnis berichtet. Beider Noten stehen in Band 144 der C. R. Paris [615–19 bzw. 1022–24], Rieszs Satz in wörtlicher Übersetzung des obigen und Fischers Satz in der Form:

«THÉORÈME. — *Si une suite de fonctions appartenant à Ω converge en moyenne, il existe dans Ω une fonction f vers laquelle elle converge en moyenne.*

Hierbei ist Ω die Menge der obigen Funktionen f , und «Konvergenz im Mittel» bedeutet Konvergenz in der L^2 -Norm, wie üblich. Unter Benutzung einer orthonormalen Folge erhält Fischer dann ohne Mühe die Rieszsche Form des Satzes.

Rückblickend sehen wir, dass wir hier tatsächlich mit zentralen Ideen der Exponenten der ganzen Entwicklung, Lebesgue, Hilbert, Fréchet, Schmidt, Fatou und natürlich Riesz und Fischer, in Berührung gekommen sind.

4. Funktionale auf Hilberträumen (1907, 1934–35)

Die nächsten 3 Abschnitte 4–6 hängen innerlich zusammen, indem sie Marksteine der *Dualitätstheorie* betreffen, also der Idee, die auf einem Raum definierten stetigen linearen

Funktionale zu untersuchen und damit zugleich Aufschluss über den betreffenden Raum selbst zu erhalten. Dazu braucht man zuerst einmal eine allgemeine Darstellung solcher Funktionale, und darum handelt es sich hier. Für den $L^2[a, b]$ gibt Riesz 1907 die folgende Definition und Darstellung dieser Funktionale [C. R. Paris 144, 1409–11]:

«Pour l'ensemble des fonctions sommables, de carré sommable, j'appelle *opération continue* chaque opération faisant correspondre à toute fonction f de l'ensemble un nombre $U(f)$ et telle que, quand f_n converge en moyenne vers f , $U(f_n)$ converge vers $U(f)$. L'opération est dite *linéaire* si $U(f_1 + f_2) = U(f_1) + U(f_2)$ et $U(cf) = cU(f)$. Alors pour chaque opération linéaire continue il existe une fonction k telle que la valeur de l'opération pour une fonction quelconque f est donnée par l'intégrale du produit des fonctions f et k .»

Also in Formeln:

$$U(f) = \int_a^b f(x) k(x) dx, \quad k \in L^2[a, b].$$

Dasselbe Ergebnis findet gleichzeitig Fréchet (l.c., 1414–16], der die L^2 -Metrik von Riesz (s. Abschn. 3) übernimmt, aber sonst unabhängig vorgeht.

Motiviert durch den Riesz-Fischer-Satz, hatte Riesz, wie der Titel der Note, «Sur une espèce de Géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables», zeigt, das Programm, die «Methode der Koordinaten», die man in ℓ^2 (in Gestalt der Glieder der einzelnen Folge) hat, auf den $L^2[a, b]$ zu übertragen. Den ℓ^2 nennt er «Raum» (espace); bei $L^2[a, b]$ wagt er sich das noch nicht, er spricht nur von einem «Funktionensystem». Die uns heute geläufige «geometrische» Sprechweise in der Hilbertraumtheorie stammt allerdings nicht von Riesz, sondern von E. Schmidt, der sie 1908 [Rend. Mat. Palermo 25, 53–77] (für den komplexen ℓ^2) einföhrte.

Für das Folgende benutzen wir nun die willkommene Gelegenheit, ein paar Worte über die recht merkwürdige weitere Entwicklung der genannten Theorie zu sagen. Voller 20 Jahre dauerte es, bis der Hilbertraum 1927 erstmals axiomatisch definiert wurde, und zwar durch J. von Neumann [Göttinger Nachr., 15] in seiner Theorie unbeschränkter linearer Operatoren, die er für eine von Hilbert angeregte mathematische Grundlegung der Dirac-Heisenberg-Schrödingerschen Quantenmechanik von 1925–26 brauchte. Diese Definition enthielt die Bedingung der Separabilität [5*] – ℓ^2 und L^2 sind separabel –, aber bald bemerkten Löwig [Acta Szeged 7 (1934–35), 1–33], Riesz [l.c., 34–38] und Rellich [Math. Ann. 110 (1935), 342–56] unabhängig voneinander, dass diese Bedingung eigentlich entbehrlich ist. So ergab sich – übrigens recht spät – die heute übliche Definition des Hilbertraums, und Riesz [l.c.] teilte dazu, von Löwig angeregt, seine bekannte Darstellung samt dem üblichen Beweis (s. z.B. auch [10], 189–90) mit:

«Für jede [stetige] lineare Funktion $l(f)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes ‹erzeugendes› Element g , so dass

$$l(f) = (f, g).$$

(.,.) ist dabei das innere Produkt des Hilbertraums.

5. Funktionale auf $C[a, b]$ (1909, 1914)

Eine ungleich viel schwierigere Aufgabe als die Darstellung der Funktionale auf Hilberträumen, nämlich, dasselbe für $C[a, b]$, erledigte Riesz 1909, und zwar in so glanzvoller und endgültiger Weise, dass man leider oft vergisst, wer den ersten Schritt in das Neuland der allgemeinen Darstellung von Funktionalen auf wichtigen speziellen Räumen getan hat. Es war dies Hadamard [C. R. Paris 136, 351–54], der schon frühzeitig (1903) für die stetigen linearen Funktionale A auf $C[a, b]$ die Darstellung

$$A[f(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) h_n(x) dx \quad h_n \in L^2[a, b]$$

gab. Diese hat aber den Mangel, dass wir es nur mit dem Grenzwert eines Integrals anstatt mit dem Integral selbst zu tun haben und dass die h_n durch A nicht eindeutig bestimmt sind.

Dem half Riesz 1909 durch ein Stieltjesintegral ab, in dem eine Funktion α von beschränkter Schwankung vorkommt; sein Satz lautet [C. R. Paris 149, 974–77]:

Étant donnée l'opération linéaire $A[f(x)]$, on peut déterminer la fonction à variation bornée $\alpha(x)$, telle que, quelle que soit la fonction continue $f(x)$, on ait

$$A[f(x)] = \int_0^1 f(x) d\alpha(x).$$

[0, 1] statt $[a, b]$ ist unwesentlich. α ist für gegebenes A im wesentlichen eindeutig bestimmt (s. [12], 110–12). Merkwürdig ist, dass das schon 1894 eingeführte Stieltjesintegral erst 1906 erstmals (durch Hilbert, s. [6], 109, 124) und nun hier erst 15 Jahre später zum zweiten Male Anwendung findet. Angeregt durch Lebesgue gab Riesz 1914 einen neuen, einfacheren Beweis [Ann. Éc. Norm. Sup. 31, 9–14].

Inzwischen hatte der sehr starke Widerhall der eleganten Rieszschen Darstellung zum Beginn einer reichen Entwicklung von Integrationstheorien geführt, zuerst mit dem Ziel der Vereinigung des Lebesgue-, Stieltjes- und Hellingerintegrals (durch Radon, Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien, Math.-Nat. Kl., 122 (1913), 1295–1438) und später bis zur Gegenwart für stetige Funktionen mit Definitions- und Wertebereich in immer allgemeineren topologischen Räumen, worauf wir hier nicht eingehen können [6*].

6. L^p -Räume und ihre Funktionale (1910)

Nachdem nun die Hilberträume $L^2 = L^2[a, b]$ eingeführt und besonders durch den Riesz-Fischer-Satz in ihrer Bedeutung erkannt worden waren, lag es «nahe», Räume $L^p = L^p[a, b]$ der (Äquivalenzklassen von) auf $[a, b]$ messbaren Funktionen f mit endlichem Lebesgue-Integral $\int_a^b |f|^p dx$ in ähnlicher Weise zu definieren. Dies hat Riesz 1910 in seiner grossartigen Arbeit «Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen» [Math. Ann. 69, 449–97] getan, in der er mit einem Schlag eine voll entwickelte Theorie der Räume («Funktionsklassen» sagt er) L^p ($1 < p < \infty$) und ihrer dualen L^q , $q = p/(p - 1)$,

bietet, so reich, dass wir hier nur die wesentlichen tragenden Ideen beleuchten können. Wir schliessen uns Dieudonnés Meinung in [2], 124, an, der die Arbeit als die nach Hilberts 4. Mitteilung bedeutungsvollste für die Entwicklung der Funktionalanalysis bezeichnet. Den Anstoss dazu gab Riesz das Problem der Lösbarkeit eines abzählbaren (oder überabzählbaren) Gleichungssystems

$$\int_a^b f_i(x) \xi(x) dx = c_i \quad (i \in J)$$

mit gegebenem f_i und Konstanten c_i nach der unbekannten Funktion $\xi(x)$. Gleich zu Beginn (S. 450) weist er auf die hier grundlegende Rolle des Lebesgue-Integrals hin:
 «[Die] Möglichkeit, in sehr allgemeinen Fällen entscheidende [Lösbarkeits-] Kriterien zu entwickeln, ist erst seit kurzem gegeben, seitdem nämlich der Begriff des Integrals durch Lebesgue jene geistreiche und glückliche Erweiterung erfahren hat.»

Nach Erinnerung an Schmidts Lösung des Problems für den ℓ^2 in der Arbeit von 1908 (s. Abschn. 4), also wegen des Riesz-Fischer-Satzes für den L^2 , spricht Riesz sofort von der prinzipiellen Änderung der Lage beim Übergang vom selbstdualen L^2 (nicht sein Ausdruck; auch «dual» sagt er nicht) zu L^p mit $p \neq 2$ (und > 1) und von der grundsätzlichen Tragweite dieses kühnen Schrittes (S. 452):

«Jede Zahl p bestimmt eine Funktionenklasse $[L^p]$. Die Rolle der Klasse $[L^2]$ übernehmen hier je zwei Klassen $[L^p]$ und $[L^{p/(p-1)}]$ Die Untersuchung dieser Funktionenklassen wird auf die wirklichen und scheinbaren Vorteile des Exponenten $p = 2$ ein ganz besonderes Licht werfen; und man kann auch behaupten, dass sie für eine axiomatische Untersuchung der Funktionenräume brauchbares Material liefert.»

«Funktionenraum» sagt Riesz hier zum ersten Male! Hier stehen wir also erneut (vgl. Abschn. 5) am Übergang von Hilberträumen zu (speziellen) Banachräumen, und Riesz betont (S. 453), dass nun «die synthetische Behandlungsweise in ihre vollen Rechte tritt», weil man eben nicht mehr ℓ^p (den Raum der Folgen $a = (a_i)$ mit konvergenter Reihe $\sum |a_i|^p$) heranziehen kann wie ℓ^2 bei L^2 vermöge Riesz-Fischer, sondern unabhängig vorgehen muss.

Äusserst instruktiv ist es nun zu verfolgen, wie Riesz in diesem Meisterwerk in genialer Weise seine Theorie zielsicher schrittweise entfaltet, beginnend mit dem Beweis des «Handwerkszeuges» der sog. Hölder- und Minkowski-Ungleichungen für Integrale, gefolgt von der Definition der starken Konvergenz einer Folge $\{f_i\} \subset L^p$ gegen f durch

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - f_i(x)|^p dx = 0 \quad (\text{S. 464})$$

und der schwachen Konvergenz in einer Weise, die er als gleichwertig mit dem heute üblichen

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b (f(x) - f_i(x)) g(x) dx = 0 \quad \text{für alle } g \in L^q$$

nachweist, und gekrönt durch seinen für alles Weitere entscheidend wichtigen «Hauptsatz über schwache Konvergenz» (S. 466), der besagt, dass jede unendliche Menge von Funk-

tionen f im L^p , für die alle Integralwerte $\int_a^b |f|^p dx$ unterhalb einer nur von p abhängigen Schranke liegen, schwach konvergente Teilstufen enthalten.

Gestützt auf diesen Satz, beweist Riesz nun nacheinander die Vollständigkeit des L^p , ein Kriterium für die Existenz einer Lösung $\xi \in L^p$ des obigen Systems mit $f_i \in L^q$ und die Dualität von L^p und L^q mit der Darstellung stetiger linearer Funktionale auf L^q durch (S. 475)

$$A(f) = \int_a^b a(x) f(x) dx, \quad a \in L^p.$$

Überraschend entwickelt Riesz hieraus sofort die Definition stetiger linearer Operatoren («Funktionaltransformationen») $T[f(x)]$ auf L^p , deren Adjungierter («Transponierter») $\mathcal{T}[g(x)]$ auf L^q , definiert durch (S. 478)

$$\int_a^b T[f(x)] g(x) dx = \int_a^b f(x) \mathcal{T}[g(x)] dx,$$

und beweist die bekannte Bedingung für die Existenz der Inversen,

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \leq M^p \int_a^b |T[f(x)]|^p dx \quad \text{für alle } f \in L^p,$$

und entsprechend für die Inverse von \mathcal{T} .

Nach diesem Höhepunkt gibt Riesz eine Anwendung der Ergebnisse auf die Spektraltheorie kompakter Operatoren («vollstetiger Funktionaltransformationen») vermöge

$$\xi(x) - \lambda K[\xi(x)] = f(x)$$

mit $\xi \in L^2$ und symmetrischem $K = \mathcal{K}$, also für lineare Operatoren, bei denen definitionsgemäß (S. 487) «jede schwach konvergente Folge in eine stark konvergente übergeht»; dies stimmt mit Hilberts Definition überein [7*]. Hier haben wir also einen Vorläufer einer «abstrakten Fredholmtheorie», die Rieszs nächstes grosses Ziel gewesen ist, wie wir in Abschn. 8 sehen werden.

7. Rieszsche Form der Hilbertschen Spektraltheorie (1913)

Vage Ansätze zur Spektraltheorie für Differentialgleichungen reichen weit zurück. Spektraltheorie im funktionalanalytischen Sinne entwickelte Hilbert, fassend auf H. A. Schwarz, Poincaré und anderen klassischen Meistern und unmittelbar angeregt durch Fredholms Theorie, in seinen Mitteilungen über Integralgleichungen; vgl. [9], 50–52. Mit genialem Blick erkannte Riesz, dass sich Hilberts Methode der quadratischen Formen

$$Q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} k_{mn} x_m x_n \quad (k_{mn} = k_{nm})$$

von unendlich vielen Variablen durch eine begrifflich und technisch wesentlich einfachere ersetzen lässt. Zusammen mit der im vorigen Abschnitt besprochenen Arbeit und dem Wunsch, eine entsprechende Theorie der Folgenräume ℓ^p zu entwickeln, gab dies Riesz auf Borels Einladung hin den Anstoß zur Abfassung des Buches «*Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*» (Sammlung Borel, 1913) über eine Lösungstheorie unendlicher Gleichungssysteme

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = c_i, \quad a = (a_{ik}) \in \ell^q; \quad i = 1, 2, \dots$$

(s. auch [11], 831–1016), die Riesz analog der in Abschn. 6 entwickelte. Wir müssen dieses Buch, dessen Inhalt Riesz bescheiden eine *bekannte Theorie, dargestellt «sous des aspects nouveaux»* nennt, unter Rieszs funktionalanalytische Grosstaten rechnen, weil er darin anstatt der Hilbertschen quadratischen Formen Q die stetigen linearen Operatoren («*substitutions linéaires*») zum zentralen Begriff erhob und damit der Spektraltheorie die uns heute geläufige Form gab. Einleitend sagt er noch, dies müsse als eine erste Etappe der sich entwickelnden Funktionalanalysis («*la Théorie des fonctions d'une infinité de variables*») angesehen werden, «qui fournira peut-être bientôt les méthodes les plus puissantes de toute l'Analyse», sicherlich ein Urteil über die Gesamtentwicklung, das Rieszs ungewöhnlichem Scharfblick zu aller Ehre gereicht!

Kapitel I des Buches bringt einen interessanten historischen Überblick über unendliche Gleichungssysteme, Kap. II eine Einführung in die unendlichen Determinanten («on attribue leur introduction à M. G. W. Hill») und Kap. III eine Verallgemeinerung der Schmidtschen ℓ^2 -Gleichungstheorie auf den Folgenraum ℓ^p mit $p > 1$ (vgl. Abschn. 6) – aber nirgends nennt er den ℓ^p einen «Raum»: So sehr fühlt man sich damals noch der Euklidischen Geometrie verpflichtet, aus der ℓ^2 erwachsen ist (s. Abschn. 3), dass man jene allgemeinere Sprechweise noch nicht wagt.

Uns interessieren vor allem Kap. IV und V, die der Spektraltheorie stetiger linearer Operatoren («*substitutions linéaires*») und der Umformung der Hilbertschen Spektraltheorie gewidmet sind. Riesz definiert einen solchen Operator auf dem Raum («*espace hilbertien*») ℓ^2 als einen, der konvergente Folgen in ebensolche transformiert. Weiter führt er die Norm («*borne*») M_A eines solchen Operators A ein und zeigt, dass A die starke Konvergenz einer Folge $\{x^{(n)}\}$ mit $x^{(n)} = (x_k^{(n)})$ im ℓ^2 erhält, die durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_k^{(n)}|^2 \rightarrow 0 \tag{S. 79}$$

definiert ist. Vollstetige lineare Operatoren definiert Riesz (ähnlich wie im vorigen Abschnitt) als diejenigen, die alle konvergenten Folgen im ℓ^2 in stark konvergente transformieren. Er wendet sich dann Folgen von Operatoren zu und führt (S. 107) die starke und die gleichmäßige Operatorkonvergenz ein, in moderner Bezeichnung

$$\|A_n x - Ax\| \rightarrow 0 \quad \text{für alle } x \in \ell^2 \quad \text{bzw.} \quad \|A_n - A\| \rightarrow 0.$$

Spektrum und Resolvente folgen als nächste Begriffe, und Riesz zeigt (S. 117) die Holomorphie der letzteren mittels eines Funktionalkalküls, den er als «*le calcul des résidus*» bezeichnet.

In Kap. V stellt Riesz die Verbindung mit Hilberts Formen her, indem er jedem Operator A vermöge $(x, y) \mapsto (Ax, y)$ eine bilineare Form und umgekehrt zuordnet. Gegen Ende des Kapitels beweist er als Höhepunkt und Abschluss der Theorie die Spektraldarstellung

$$f(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) dA_{\xi} \quad (\text{S. 137})$$

für stetiges f und einen selbstadjungierten stetigen linearen Operator A auf ℓ^2 (unter Hinweis, dass man tatsächlich nur über ein endliches Intervall zu integrieren braucht). Das letzte Kapitel bringt dann noch einige Anwendungen auf Differentialgleichungen und Fourierreihen.

Wie wir damit gesehen haben, bietet diese noch heute lesenswerte Darstellung, wie schon die Arbeit in Abschn. 6, wiederum eine voll ausgereifte, in sich geschlossene Theorie, die sich ebenfalls als von höchster Bedeutung für die Gesamtentwicklung der Funktionalanalysis erweisen sollte.

8. Kompakte lineare Operatoren (1916–18)

Im vorliegenden Abschnitt treten uns zum dritten Male – aber diesmal ganz zentral – kompakte Operatoren («vollstetige Transformationen») [7*] entgegen, in Rieszs berühmter Arbeit «Über lineare Funktionalgleichungen» [Acta Math. 41 (1918), 71–98], einer «abstrakten Fredholmtheorie», die Hilberts Theorie der vollstetigen quadratischen Formen (1906, 4. Mitteilung) mit umfasst. Dass in Fredholms Theorie nicht die Integraldarstellung, sondern die Kompaktheit des vorkommenden linearen Operators entscheidend ist, hatte schon Hilbert erkannt. Riesz hat sich nicht geäussert, wie weit seine Ideen zu der 1916 eingereichten, aber, durch den Krieg verzögert, erst 1918 erschienenen Arbeit zurückgehen.

Riesz legt wieder die Menge der auf einem Intervall $[a, b]$ stetigen Funktionen zugrunde, aber im Gegensatz zu früheren Arbeiten nennt er diese erstmals «Funktionalraum» und führt dazu eine axiomatisch definierte und mit dem Schmidtschen Symbol $\|\cdot\|$ (1908) bezeichnete Norm (die Maximumsnorm) ein (S. 72):

«Ferner nennen wir *Norm* von $f(x)$ und bezeichnen mit $\|f\|$ den Maximalwert von $|f(x)|$; die Grösse $\|f\|$ ist danach im Allgemeinen positiv und verschwindet nur dann, wenn $f(x)$ identisch verschwindet. Ferner bestehen für sie die Beziehungen

$$\|cf(x)\| = |c| \|f(x)\|; \quad \|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|.$$

Unter *Distanz* der Funktionen f_1, f_2 verstehen wir die Norm $\|f_1 - f_2\| = \|f_2 - f_1\|$ ihrer Differenz.»

Riesz benutzt im weiteren nur diese Axiome des normierten Raumes, volle 6 Jahre vor dem Erscheinen der Banachschen Dissertation, sieht also von der speziellen Gestalt der Norm (ausser im Zusammenhang mit Integralgleichungen) ab. Im Vollbewusstsein der Tragweite dieses Vorgehens sagt er dazu, die Beschränkung auf stetige Funktionen sei nicht wesentlich:

«[Der] in den neueren Untersuchungen über . . . Funktionalräume bewanderte Leser wird die allgemeinere Verwendbarkeit der Methode sofort erkennen [und] auch bemerken, dass [u. a. L^2 und ℓ^2 dabei] noch Vereinfachungen gestatten, während der hier behandelte scheinbar einfachere Fall als Prüfstein für die allgemeine Verwendbarkeit [der Methode] betrachtet werden darf.»

Hinsichtlich der «Vollstetigkeit» bezieht sich Riesz ausdrücklich auf Hilbert und auf Fréchets Begriff der Folgenkompaktheit (1906), der eine «besonders einfache und glückliche . . . Definition der vollstetigen Transformation» erlaubt (S. 73, 74):

«Eine Folge $\{f_n\}$ heisse nach Fréchet kompakt, wenn jede Teilfolge derselben eine gleichmässig konvergente [also im Sinne der Norm konvergente] Teilfolge enthält . . . [Eine] lineare Transformation heisse vollstetig, wenn sie jede *beschränkte* Folge in eine *kompakte* überführt.» [7*]

Riesz entwickelt nun in seiner Arbeit im wesentlichen eine allgemeine Spektraltheorie kompakter linearer Operatoren auf Banachräumen, die Fredholms klassische Sätze als Sonderfälle enthält. So zeigt er, dass ein kompakter linearer Operator ein höchstens abzählbares Spektrum hat, dass jedes $\lambda \neq 0$ des Spektrums ein Eigenwert mit endlichdimensionalem Eigenraum ist, dass 0 der einzige mögliche Häufungspunkt ist, dass die «Fredholmsche Alternative» (S. 86) gilt, und so fort. Diese ganze Theorie hat im Laufe der Entwicklung der stetigen linearen Operatoren keine wesentliche Änderung erfahren; lediglich haben ihr T. H. Hildebrandt [Acta Math. 51 (1928), 311–18] und J. Schauder [Studia Math. 2 (1930), 183–96] einige weitere Resultate über adjungierte Operatoren zugefügt, weshalb man auch von der «Riesz-Schauder-Theorie» spricht.

Bleibende Folgen der Rieszschen Arbeit sind vor allem:

1. Das allgemeine weltweite Interesse an der Theorie der Integralgleichungen, um 1900 plötzlich erwacht durch Fredholms sensationelle Erfolge, klang durch Rieszs Absorption der Fredholmtheorie in die Theorie der kompakten Operatoren rasch ab.
2. Riesz hat damit einer der allerwichtigsten Klassen von Operatoren einen festen Platz in der Funktionalanalysis gesichert.
3. Rieszs Arbeit bedeutet den Beginn der Theorie der Banachräume, die sich trotz der Ungunst der Zeit unglaublich rasch entwickelte.

In der Tat werden axiomatisch definierte Normen für Folgenräume schon bald durch Helly [Monatshefte Math. Phys. 31 (1921), 60–91], der u.a. Rieszs Buch erwähnt, und durch Hahn [l.c., 32 (1922), 3–88] verwendet, der den Begriff «linearer Raum» prägt, dann für abstrakte Mengen durch Banach [Fund. Math. 3 (1922), 133–81], der von einer «Klasse von Elementen» spricht, und durch N. Wiener [Bull. Soc. Math. France 50 (1921–22), 119–34], der den Ausdruck «vector family» benutzt.

9. Rieszräume (1928, 1930–32, 1940)

Mit Kriegsende beginnt 1918 für Riesz eine schwierige Zeit, bis endlich die Aufbauphase in Szeged (s. Abschn. 2) angelaufen ist. Rieszs bedeutendste spätere funktionalanalytische Arbeiten betreffen Vektorverbände oder Rieszräume. Ein *Rieszraum* ist ein teilgeordneter Vektorraum, der zugleich ein Verband ist, so dass also für je zwei Elemente A, B eine

kleinste obere Schranke und eine grösste unter Schranke existiert. [8*]. Wie wir abschliessend skizzieren wollen, hat Riesz, beginnend mit einem Vortrag «Sur la décomposition des opérations fonctionnelles linéaires» auf dem Internationalen Mathematikerkongress von 1928 in Bologna [Atti III, 143–48], in dem er Rieszräume einführte, eine Entwicklung eingeleitet, die die Funktionalanalysis mit der Verbandstheorie in Berührung gebracht hat. Den Ausgangspunkt bildet Rieszs Beobachtung, dass Jordans Satz von der Zerlegung einer Funktion beschränkter Schwankung in eine Differenz zweier monotonen Funktionen wegen der Darstellung in Abschn. 5 automatisch eine Zerlegung der Funktionale auf $C[a, b]$ ergibt. Um solche Zerlegungen nun aber *abstrakt*, d. h. unabhängig von irgendwelchen formelmässigen Darstellungen zu erhalten, führt Riesz auf Mengen von Funktionalen A, B, \dots vermöge

$$A \leq B : \Leftrightarrow A(f) \leq B(f) \text{ für alle nichtnegativen } f$$

eine Teilordnung ein. Er nennt dann B Majorante von A (und A Minorante von B) und erhält einen Rieszraum vermöge seines Hauptsatzes [l.c., 144], dass für eine majorisierbare bzw. minorisierbare Menge von Funktionalen stets eine kleinste obere bzw. grösste untere Schranke existiert.

Dass Riesz wohl von Anfang an eine neue Methode für Spektraldarstellungen linearer Operatoren im Sinn hatte, bestätigt er sofort in seiner Arbeit «Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes» [Acta Szeged 5 (1930–32), 23–54]. Damals entwickelt man «in aller Eile» [l.c., 23] die in der Quantenmechanik benötigten *unbeschränkten* linearen Operatoren im (separablen) Hilbertraum, von Neumann unter Benutzung der «Cayleytransformation» (s. [1], 308), M. H. Stone vermöge Carlemanscher Ideen [l.c., 310] und Riesz nun unter Benutzung eines lokalen Zerlegungssatzes [Acta Szeged 5, 37] für beschränkte lineare Operatoren, ein Analogon des Satzes, dass [l.c., 25, 26]

«... [jede] beschränkte quadratische Form, ... wenn sie nicht schon ... definit ist, immer als Differenz zweier positiv definiten und zueinander orthogonalen Formen dargestellt werden kann [Von] diesem Satz aus ... [bietet sich] der klarste Einblick in das enge Verhältnis zwischen den alten und den neuen Resultaten ... »

Riesz überträgt dann [l.c., 44] den Zerlegungssatz auf selbstadjungierte unbeschränkte lineare Operatoren und gibt am Schluss die Spektralzerlegung und entsprechende Integraldarstellungen für den unbeschränkten Fall.

Unabhängig von Riesz werden Rieszräume und Banachverbände (Rieszräume, die auch Banachräume sind, [8*]) durch Kantorowitsch (1935–37), Freudenthal (1936), G. Birkhoff (1938) und andere behandelt. Die in diesen Arbeiten entscheidende Verbandseigenschaft vermag nun Riesz 1940 [Annals of Math. 41, 174–206] durch eine schwächere «Zerlegungseigenschaft» zu ersetzen, bei der aber die dualen Räume immer noch Verbände bilden, so dass er eine zugehörige Spektraltheorie mit Anwendung auf abstrakte Integrale (Daniells Integral insbesondere) gewinnen kann. Auf diese Arbeit folgt später die Entwicklung «allgemeiner Rieszdarstellungen» linearer Operatoren auf Räumen von praktischem Interesse, durch Grothendieck [Canad. J. Math. 5 (1953), 129–73], Bartle, Dunford and J. T. Schwartz [l.c., 7 (1955), 289–305] und andere, eine Entwicklung, die sich bis fast in die Gegenwart fortgesetzt hat.

10. Schlussbemerkung

Angesichts unserer notwendigen, wenn auch mühelosen Einteilung in Abschnitte sollten wir nicht die innere Kontinuität übersehen, die Rieszs funktionalanalytisches Schaffen auszeichnet, der Motivierung nach von den Integralgleichungen her, verbunden mit den am Ende von Abschn. 3 genannten Ideen, und der Entwicklungstendenz nach von Hilbert- zu Banachräumen, stark beeinflusst von der zentralen Rolle der kompakten Operatoren und durch die Methoden der Spektraltheorie, insbesondere der Spektraldarstellungen linearer Operatoren. So erscheint uns rückblickend dieses grosse Werk als ein organisches Ganzes von in der Mathematik selten erreichter Geschlossenheit und Schönheit.

Erwin Kreyszig, Carleton University, Ottawa, Kanada

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 Birkhoff G. and Kreyszig E.: The establishment of functional analysis. Historia Math. 11, 258–321 (1984).
- 2 Dieudonné J.: History of Functional Analysis (North-Holland, Amsterdam 1981).
- 3 Fréchet M.: Sur quelques points du Calcul fonctionnel. Rend. Mat. Palermo 22, 1–74 (1906).
- 4 Hadamard J.: Œuvres (Centre Nat. Rech. Scient., Paris 1968).
- 5 Hajós G.: Frédéric Riesz 1880–1956. Acta Szeged 7, 1–3 (1956).
- 6 Hilbert D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (Teubner, Leipzig 1912; Chelsea, New York 1953).
- 7 Julia G.: Notice nécrologique sur Frédéric Riesz, Correspondant pour la Section de Géométrie, Comptes rendus (Paris). 242, 2193–95 (1956).
- 8 Kreyszig E.: Zur Entwicklung der zentralen Ideen in der Funktionalanalysis. Elemente der Math. 41, 25–35 (1986).
- 9 Kreyszig E.: Über die weitere Entwicklung der Funktionalanalysis bis 1932. Elemente der Math. 41, 49–57 (1986).
- 10 Kreyszig E.: Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley Classics Library (Wiley, New York 1989).
- 11 Riesz F.: Gesammelte Arbeiten (Akadémiai kiadó, Budapest 1960).
- 12 Riesz F. et Szökefalvi-Nagy B.: Leçons d'analyse fonctionnelle (Akadémiai kiadó, Budapest 1952).
- 13 Rogosinski W. W.: Frédéric Riesz. J. London Math. Soc. 31, 508–12 (1956).
- 14 Yosida K.: Functional Analysis, 3. Aufl. (Springer, Berlin 1971).
- 15 Zygmund A.: Trigonometric Series, 2. Aufl. (Cambridge University Press, Cambridge 1959).

ANMERKUNGEN

- [1*] Kurz angedeutet wurde dieses Thema in [9], 52–54.
- [2*] Die Gebietseinteilung in [11], die «Funktionenräume» und «Funktionalanalysis» trennt, erschien uns nicht besonders günstig, und wir haben sie nicht benutzt.
- [3*] Vgl. S. 121 in T. Hawkins, Lebesgue's Theory of Integration, 2. Aufl. (Chelsea, New York 1975). C. R. Paris bedeutet Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris.
- [4*] Nach einer freundlichen Mitteilung von Herrn Prof. B. Szökefalvi-Nagy dürfte wohl J. Vályi (Vályi Gyula) sein Doktorvater gewesen sein. In [11] findet man hierüber keine Angaben, und Riesz erwähnt Vályi nur ganz nebenbei.
Nach einer weiteren freundlichen Mitteilung von Herrn Dr. U. Hunger (Universitätsarchiv Göttingen) hat Riesz nach seiner Budapester Promotion im Wintersemester 1903/04 u.a. bei Hilbert gehört (partielle Differentialgleichungen) und an 2 Seminaren (Hilbert/Minkowski und Klein/Schwarzschild) teilgenommen.
- [5*] Ein Raum heißt *separabel*, wenn er eine in ihm dichte *abzählbare* Teilmenge besitzt.
- [6*] Für die Entwicklung bis etwa 1970 siehe J. Batt [DMV-Bericht 74 (1973), 147–181] und die zugehörigen 150 Literaturangaben.

- [7*] Ein linearer Operator heisst *kompakt*, wenn er jede beschränkte Menge in eine Menge transformiert, deren abgeschlossene Hülle kompakt ist, äquivalent dazu, wenn er jede beschränkte Folge in eine Folge transformiert, die eine konvergente Teilfolge enthält. Ein kompakter linearer Operator transformiert jede schwach konvergente Folge in eine stark konvergente, und ist der betreffende Raum reflexiv (wie z.B. ℓ^p und L^p mit $1 < p < \infty$), so gilt auch die Umkehrung.
- [8*] Beispiele von Folgen- und Funktionenräumen, die Rieszräume bilden, findet man z.B. in G. Birkhoff, Lattice Theory, 3. Aufl. (American Mathematical Society, Providence, RI 1967), Kap. XV, wo auch Banachverbände ausführlich behandelt werden.

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/90/050117-14\$1.50 + 0.20/0

Die Polynome von Yang-Lee und ihre Nullstellen

1. Einführung

Das Ising-Modell der statistischen Mechanik führt zur Untersuchung der Nullstellen spezieller Polynome in einer komplexen Variablen. Je nach den Werten der beteiligten Parameter befinden sich diese Nullstellen auf dem Einheitskreis, auf der negativen reellen Halbachse oder auf der Vereinigung der beiden Mengen. Es gibt aber auch Fälle, in denen sie diese Vereinigungsmenge verlassen.

Das Ising-Modell benützt einen Graphen G , dessen Eckpunkte $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ die Lage der Teilchen markieren und dessen Kanten $\{i, j\} \in K$ Teilchenpaare verbinden, welche in Wechselwirkung stehen. Für jedes Teilchen ist ein Spin $\sigma_i \in \{+1, -1\}$ gegeben und die Energie des Systems berechnet sich aus

$$E = -J \sum_{\{i, j\} \in K} \sigma_i \sigma_j - H \sum_i \sigma_i. \quad (1.1)$$

Dabei ist H die Magnetfeldstärke und J eine Konstante, die bei ferromagnetischen Wechselwirkungen positiv, bei antiferromagnetischen negativ ist. Summiert man über alle 2^n Werte des Vektors $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, so erhält man die «Partitionsfunktion»

$$Z_n = \sum_{\sigma} e^{-E/kT} = \sum_{\sigma} \exp(J_1 \sum_{\{i, j\} \in K} \sigma_i \sigma_j + H_1 \sum_i \sigma_i) \quad (1.2)$$

(k ist die Boltzmann'sche Konstante, $J_1 = J/kT$ die Temperatur- und $H_1 = H/kT$ die Magnetfeldvariable). Die freie Energie ist dann

$$f(T, H) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{kT}{n} \log Z_n. \quad (1.3)$$

Singularitäten dieser Funktion entstehen dort, wo sich Nullstellen der Z_n häufen, und erscheinen physikalisch als Phasenübergänge. Es ist deshalb wichtig, Aussagen über die Lösungen von $Z_n = 0$ zu gewinnen.

Wir beschränken uns hier auf den Fall $H = 0$. Man kann dann Z_n im Wesentlichen als erzeugende Funktion interpretieren: man betrachtet die σ_i als unabhängige Zufallsvaria-