

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 45 (1990)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Potenzen der Pascalmatrix und eine Identität der Kombinatorik  
**Autor:** Brawer, R.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-42417>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Potenzen der Pascalmatrix und eine Identität der Kombinatorik

## Einleitung

In dieser Note beschäftigen wir uns mit Matrizen, deren Elemente Binomialkoeffizienten oder Verallgemeinerungen davon sind. Die Rekursionsformeln zwischen diesen werden mit Hilfe des Matrixproduktes dargestellt. Umgekehrt erhalten wir aus der Matrixdarstellung kombinatorische Identitäten.

Die Elemente einer  $(n+1) \times (n+1)$  *Pascalmatrix*  $P$  sind durch  $P(j, k) := 1$ , für  $j = k$  oder  $k = 0$  und  $j = 0, \dots, n$ ;  $P(j, k) := 0$  für  $k > j$ ;  $P(j, k) := P(j-1, k) + P(j-1, k-1)$ , für  $j = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, n$ , gegeben. Die Zahlen  $P(j, k)$  sind nichts anderes als die wohlbekannten Binomialkoeffizienten [1], [3]. Wir wissen, dass die Summe der  $n$ -ten Zeile die Anzahl verschiedener Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge angibt:

$$\sum_{k=0}^n P(n, k) = 2^n.$$

Die Aufgabe, die Anzahl  $Hy(n, k)$  der  $k$ -dimensionalen Randzellen eines Hyperwürfels in einem  $n$ -dimensionalen Euklidischen Raum zu bestimmen, führt auf die folgende Rekursionsformel [2] und auf die *Hyperwürfelmatrix*  $Hy$ :  $Hy(k, k) := 1$ ,  $Hy(k, 0) := 2^k$ , für  $k = 0, \dots, n$ ;  $Hy(j, k) := 0$  für  $k > j$ ;  $Hy(j, k) := 2Hy(j-1, k) + Hy(j-1, k-1)$ , für  $j = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Für  $n = 5$  erhalten wir die folgenden Matrizen und die entsprechenden Zeilensummen:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^0 \\ 2^1 \\ 2^2 \\ 2^3 \\ 2^4 \\ 2^5 \end{matrix}$$

$$Hy = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 16 & 32 & 24 & 8 & 1 & 0 \\ 32 & 80 & 80 & 40 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3^0 \\ 3^1 \\ 3^2 \\ 3^3 \\ 3^4 \\ 3^5 \end{matrix}$$

Der Hyperwürfel im  $R^5$  besitzt 32 Ecken, 80 Kanten, ebensoviele 2-dimensionale Seiten, 40 3-dimensionale Würfel und 10 4-dimensionale Hyperwürfel. Die Hyperwürfelmatrix und die Pascalmatrix sind durch die Gleichung  $Hy = P^2$  miteinander verknüpft. Für die

inversen Matrizen und deren Zeilensummen erhalten wir:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$Hy^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 12 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 16 & -32 & 24 & -8 & 1 & 0 \\ -32 & 80 & -80 & 40 & -10 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}$$

So wie in der  $n$ -ten Zeile der Pascalmatrix die Koeffizienten der Entwicklung von  $(1+x)^n$  stehen, so stehen in den  $n$ -ten Zeilen der Hyperwürfelmatrix die Koeffizienten von  $(2+x)^n$ . [6], [7].

Wir definieren die  $(n+1) \times (n+1)$  Matrizen  $B_{(n,p)}$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , wie folgt:

$$B_{(n,p)}(k,k) := 1, \quad B_{(n,p)}(k,0) := p^k, \quad \text{für } k = 0, \dots, n, \quad (1)$$

$$B_{(n,p)}(j,k) := p B_{(n,p)}(j-1,k) + B_{(n,p)}(j-1,k-1), \quad \text{für } j = 1, \dots, n, \\ B_{(n,p)}(j,k) := 0, \quad \text{für } k < 0 \text{ oder } k > n. \quad (2)$$

Offensichtlich gilt  $B_{(n,1)} = P$ ,  $B_{(n,2)} = Hy$  und

$$B_{(n+1,p)}(j,k) = B_{(n,p)}(j,k), \quad \text{für } j = 0, \dots, n, \quad k = 0, \dots, n. \quad (3)$$

Die Zahlen  $B_{(n,p)}(j,k)$  sind verallgemeinerte Pascalzahlen, die neben den Randbedingungen (1) für festes  $p$  und  $n$  durch die Rekursionsformel  $B(j,k) := p B(j-1,k) + B(j-1,k-1)$  bestimmt sind. Andere Erweiterungen finden sich in [4], [5] und [8].

### Theorem 1:

$$\sum_{k=0}^n B_{(n,p)}(n,k) x^k = (p+x)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad p, x \in \mathbb{R}.$$

**Beweis.** Die Behauptung ist sicher wahr für  $n = 0$ . Mittels vollständiger Induktion erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} B_{(n+1,p)}(n+1,k) x^k &= \sum_{k=0}^{n+1} \{ p B_{(n+1,p)}(n,k) + B_{(n+1,p)}(n,k-1) \} x^k \\ &= \sum_{k=0}^n p B_{(n,p)}(n,k) x^k + \sum_{k=0}^n B_{(n,p)}(n,k) x^k \\ &= p(p+x)^n + (p+x)^n = (p+x)^{n+1}. \end{aligned}$$



Setzen wir  $x = 1$ , so erhalten wir

**Korollar 1.**

$$\sum_{k=0}^n B_{(n,p)}(n,k) = (p+1)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

**Theorem 2:**

$$B_{(n,p)} = B_{(n,1)}^p, \quad \text{für } p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

**Beweis.** Die Aussage ist wahr für  $p = 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und für alle  $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,  $n = 0$ . Der Induktionsschritt von  $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  auf  $(n+1, p+1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , beziehungsweise auf  $(n+1, p-1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^-$ , erfolgt durch:

$$\begin{aligned} B_{(n+1,p)}^p B_{(n+1,1)} &= \begin{bmatrix} p B_{(n,p)} & 0 \\ c^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{(n,1)} & 0 \\ d^T & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B_{(n,p)}^p B_{(n,1)} & 0 \\ c^T B_{(n,1)} + d^T & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B_{(n,p+1)}^{p+1} & 0 \\ c^T B_{(n,1)} + d^T & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass die  $(n+2)$ -te Zeile des Produktes wie die Rekursionsformel für die  $(n+2)$ -te Zeile von  $B_{(n+1,p)}$  aufgebaut ist. Wir benützen die Gleichungen (2) und (3).

$$\begin{aligned} (B_{(n+1,p)} B_{(n+1,1)})(j,k) &= \sum_{f=0}^{n+1} B_{(n+1,p)}(j,f) B_{(n+1,1)}(f,k) \\ &= \sum_{f=0}^n p B_{(n+1,p)}(j-1,f) \binom{f}{k} + \sum_{f=1}^{n+1} B_{(n+1,p)}(j-1,k-1) \binom{f}{k} \\ &= p B_{(n,p+1)}(j-1,k) + \sum_{f=1}^n B_{(n+1,p)}(j-1,f-1) \binom{f-1}{k} \\ &\quad + \sum_{f=1}^n B_{(n+1,p)}(j-1,f-1) \binom{f-1}{k-1} \\ &= p B_{(n,p+1)}(j-1,k) + B_{(n,p+1)}(j-1,k) + B_{(n,p+1)}(j-1,k-1) \\ &= (p+1) B_{(n,p+1)}(j-1,k) + B_{(n,p+1)}(j-1,k-1). \end{aligned}$$

■

Die beiden Theoreme ergeben eine Identität der Kombinatorik.

**Korollar 2.**

$$\sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^{k_1} \cdots \sum_{k_{|p|-1}=0}^{k_{|p|-2}} \sum_{k_{|p|}=0}^{k_{|p|-1}} (\operatorname{sgn}(p))^{n+k_{|p|}} \binom{n}{k_1} \binom{k_1}{k_2} \cdots \binom{k_{|p|-2}}{k_{|p|-1}} \binom{k_{|p|-1}}{k_{|p|}} = (p+1)^n,$$

für  $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

Für  $p = 2$  erhalten wir:

$$\sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^{k_1} \binom{n}{k_1} \binom{k_1}{k_2} = 3^n,$$

und für  $p = -2$ :

$$\sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^{k_1} (-1)^{n+k_2} \binom{n}{k_1} \binom{k_1}{k_2} = (-1)^n.$$

M. Jeger wies mich darauf hin, dass das Korollar 2 auch aus dem polynomischen Satz

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{v_1 + \dots + v_k = n} \binom{n}{v_1} \binom{n-v_1}{v_2} \binom{n-v_1-v_2}{v_3} \dots \binom{v_k}{v_k} x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_k^{v_k},$$

hergeleitet werden kann [4]. Setzen wir hier  $k = p + 1$  und  $x_1 = \dots = x_{p+1} = 1$ , resp.  $x_1 = \dots = x_{|p|} = -1$  und  $x_{|p|+1} = 1$ , so folgt

$$\begin{aligned} (p+1)^n &= \sum_{v_1 + \dots + v_{|p|+1} = n} \binom{n}{v_1} \binom{n-v_1}{v_2} \dots \binom{n-v_1-\dots-v_{|p|-1}}{v_{|p|}} (-1)^{v_1 + \dots + v_{|p|}} \\ &= \sum_{v_1=0}^n \sum_{v_2=0}^{n-v_1} \dots \sum_{v_{|p|}=0}^{n-v_1-\dots-v_{|p|-1}} \binom{n}{n-v_1} \binom{n-v_1}{n-v_1-v_2} \\ &\quad \dots \binom{n-v_1-\dots-v_{|p|-1}}{n-v_1-\dots-v_{|p|}} (-1)^{v_1 + \dots + v_{|p|}} \\ &= \sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^{k_1} \dots \sum_{k_{|p|}=0}^{k_{|p|-1}} \binom{n}{k_1} \binom{k_1}{k_2} \dots \binom{k_{|p|-1}}{k_{|p|}} (-1)^{n-k_{|p|}}. \end{aligned}$$

R. Brawer, Seminar für angewandte Mathematik, ETH-Zürich

## LITERATUR

- 1 Coolidge J. L.: The Story of the Binomial Theorem. Amer. Math. Monthly 56, 147–157 (1949).
- 2 Davis, J. P., Hersh R.: The Mathematical Experience. Boston, 1981.
- 3 Hilton P., Pederson J.: Looking into Pascal's Triangle: Combinatorics, Arithmetic, and Geometry. Math. Magazine 60, 305–316 (1987).
- 4 Jeger M.: Eine Verallgemeinerung des Pascalschen Dreiecks. El. Math. 5, 7–9 (1950).
- 5 Long C. T.: On the Moessner Theorem on Integral Powers. Amer. Math. Monthly 71, 846–851 (1966)
- 6 Miller J. C. P.: A Pascal Triangle for the Coefficients of a Polynomial. Amer. Math. Monthly 64, 268–269 (1957).
- 7 Parker R. V.: Multiplication and Division by Binomial Factors. Amer. Math. Monthly 64, 39–42 (1957).
- 8 Pólya G., Alexanderson G. L.: Gaussian Binomial Coefficients, El. Math. 26, 102–109 (1971).