Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 45 (1990)
Heft: 4

Artikel: Perfekte Rechteckzerlegung
Autor: Müller, Carsten
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-42416

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

und schliesslich

$$\bar{P} - \underline{P} = P_1 - P_2 - \sum_{j=3}^{\infty} b_j \geqq P_1 - P_2 - \sum_{j=3}^{\infty} a_j > 0.$$

Für jede so definierte Folge $p_n > 0$ divergiert $f(\langle p_n \rangle)$.

D. Laugwitz, TH Darmstadt

LITERATURVERZEICHNIS

1 Collet, P., Eckmann J.-P.: Iterated maps on the interval as dynamical systems. Birkhäuser 1986.
2 Perron O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen, Bd. 2, 3. Auflage. Stuttgart 1957, p. 46.
3 Sizer W. S.: Continued roots. Math. Magazine *59*, 23–27 (1986).

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/90/040089-10$1.50 + 0.20/0

Perfekte Rechteckzerlegung

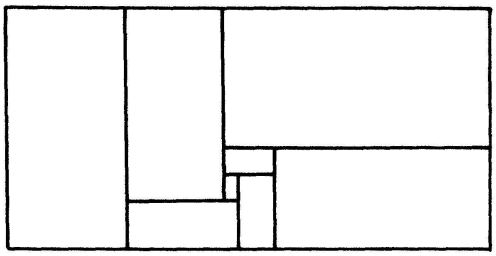
1. Ausgangspunkt

Innerhalb der elementaren Zerlegungsprobleme der euklidischen Geometrie der Ebene ist die Frage nach perfekten Zerlegungen von Polygonen interessant. Dabei wird der Begriff der perfekten Zerlegung gegeben durch

Definition 1: *Eine Zerlegung eines Polygons P in Polygone $P_1, P_2, \ldots, P_n$ heisst perfekt genau dann, wenn alle Polygone P_j ähnlich zum Polygon P und paarweise inkonkruent sind.*

Die Zahl n heisst dabei die Ordnung der Zerlegung.
Aus Untersuchungen von Bleicher [2] und Betke [1] folgt, dass sich konvexe Polygone mit mehr als vier Ecken nicht perfekt zerlegen lassen. In [10] gibt Kaiser für jedes Dreieck die minimale Ordnung seiner perfekten Zerlegung an.
Das Auffinden perfekter Quadratzerlegungen und die Suche nach der Minimalordnung solcher Zerlegungen kann in einer ganzen Reihe von Beiträgen nachvollzogen werden ([3]–[9]). Der Autor plant eine Veröffentlichung seiner Überlegungen zu diesem Problemkreis, die er schon in [11] vorstellte. Kernstück ist darin der Beweis der Tatsache, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 24$ eine perfekte Quadratzerlegung der Ordnung n existiert. Zudem sind Quadratzerlegungen der Ordnungen 21 und 22 bekannt sowie der Beweis, dass mit weniger als 21 Teilquadraten keine perfekte Zerlegung eines Quadrates existiert ([7]). Offen bleibt lediglich die Frage nach einer perfekten Quadratzerlegung der Ordnung 23.
Ziel dieser Arbeit ist es, für ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis 1:2 perfekte Zerlegungen anzugeben. Es wird dabei mit ganzzahligen Längenangaben gearbeitet. Die Angaben beziehen sich dabei stets auf die kleineren Rechteckseiten und sind so gekürzt, dass der grösste gemeinsame Teiler aller an einer Zerlegung beteiligter Längen gleich 1 ist.

Für jede konkrete Zerlegung wird eine Codierung analog dem Bouwcamp-Code für Quadratzerlegungen angegeben, wie er beispielsweise in [8] benutzt wird. Die Rechtecke werden dabei horizontal gelegt und die Grössenangaben der Teilrechtecke beziehen sich auf die kleine Seite. In einer Klammerung zusammengefasste Teilrechtecke befinden sich an einer gemeinsamen horizontalen Oberkante. Ist eine Längenangabe mit einem ′ versehen, so liegt das entsprechende Teilrechteck horizontal, sonst vertikal. Dem perfekten Rechteck aus Abbildung 1 ist der zugehörige Code zum Verständnis beigegeben.
Als Minimalordnung einer perfekten Zerlegung eines (1:2)-Rechtecks wird die Ordnung 8 nachgewiesen (Fig. 1) und zudem gezeigt, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 13$ eine solche Zerlegung existiert. Offen bleibt die Angabe perfekter Zerlegungen der Ordnungen 9 bis 12.



(9, 7, 10′) (2′, 8′) (1, 3) (4′)
Fig. 1.

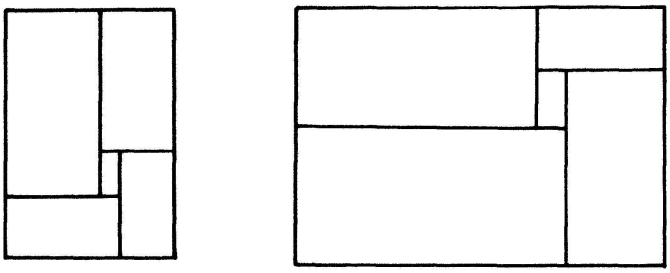
2. Anfangsbetrachtungen

Die Existenz perfekter Quadratzerlegungen garantiert für jedes Rechteck mit dem Seitenverhältnis $1:q$ (q reell, $q>1$) perfekte Zerlegungen, wobei eine Orthogonalstreckung mit dem Faktor q das Gewünschte liefert. Durch die von Duijvestijn [7] gefundene minimale Quadratordnung 21 ist folglich eine obere Grenze für die minimale Ordnung einer perfekten Rechteckzerlegung gegeben. Da jedoch in einer so erhaltenen perfekten Rechteckzerlegung alle Teilrechtecke sogar homothetisch sind, liegt die Vermutung nahe, dass es perfekte Zerlegungen von kleinerer Ordnung gibt.
Neu bei der Suche nach perfekten Zerlegungen von Rechtecken ist die Tatsache, dass durch Anfügen eines Teilrechtecks entlang einer Kante eines bereits zerlegten Rechtecks die Perfektheit erreicht werden kann. Fände man beispielsweise ein Rechteck des Seitenverhältnisses 2:3, das in paarweise inkongruente Rechtecke des Seitenverhältnisses 1:2 zerlegt ist, so kann durch Anlagerung eines (1:2)-Rechtecks ein perfektes (1:2)-Rechteck erhalten werden. Bei Quadraten ist dies unmöglich.
Eine Spezialform perfekter Zerlegungen, die nicht unwesentlich für die weiteren Überlegungen ist, sei gegeben durch

Definition 2: *Eine perfekte Zerlegung eines Rechtecks P heisst einfach genau dann, wenn es kein echtes Teilrechteck in der Zerlegung gibt, das aus wenigstens zwei, jedoch nicht allen Teilrechtecken der Zerlegung besteht.*

Die von Duijvestijn ([7]) aufgefundene Quadratzerlegung minimaler Ordnung ist zum Beispiel einfach. Man betrachtet auch beliebige Rechtecke, die keine Quadrate sind, aber einfach in paarweise inkongruente Teilquadrate zerlegt werden. Das Auffinden so zerleg-

ter Rechtecke minimaler Ordnung wird in [12] aufgezeigt. Es gibt folglich zwei Rechtecke der Minimalordnung 9, die in paarweise inkongruente Quadrate zerlegt sind. Betrachtet man die analoge Fragestellung für beliebige Rechtecke, die einfach durch paarweise inkongruente (1:2)-Rechtecke zerlegt sind, so erhält man zwei verschiedene Rechtecke der Ordnung 5 (Fig. 2).



(13, 10) (3, 7) (8′) (25′, 13′) (6, 20) (28′)
Fig. 2.

3. Erste Zerlegungen

Beim Herantasten an perfekte Zerlegungen eines (1:2)-Rechteckes werden zuerst alle beliebigen Rechtecke wachsender Ordnung aufgesucht, die in paarweise inkongruente (1:2)-Rechtecke zerlegt werden können. Durch triviale Anlagerung eines (1:2)-Rechtekkes an ein bereits zerlegtes Rechteck erhält man leicht alle 8 Rechtecke der Ordnungen 2 bis 4, die in paarweise inkongruente (1:2)-Rechtecke zerlegbar sind.
Es ist notwendig, kurz auf die Äquivalenz zweier Zerlegungen einzugehen. In naheliegender Weise seien dabei zwei Zerlegungen gleich, wenn sie sich nur durch Decktransformationen von Teilrechtecken bzw. dem Gesamtrechteck unterscheiden. So sind zum Beispiel die drei Zerlegungen (2′, 5)(4), (4, 5)(2′) und (5′)(2, 4′) äquivalent.
Die fünf nichtäquivalenten Zerlegungen der Ordnung vier sind in Fig. 3 aufgezeigt. In jedem Fall liegt ein Randrechteck in der Zerlegung vor. Durch Hinzunahme eines weiteren (1:2)-Rechtecks erhält man aus den 5 Rechtecken der Ordnung 4 12 nichtähnliche Rechtecke der Ordnung 5. Ergänzt man die beiden Zerlegungen der Ordnung 3 (9:10 und 5:12) durch die einzige Zweierzerlegung (2:5), so erhält man zwei weitere Zerlegungen der Ordnung 5. Zuzüglich der beiden einfachen Zerlegungen der Ordnung 5 (Fig. 2) existieren folglich 16 Rechtecke der Ordnung 5.

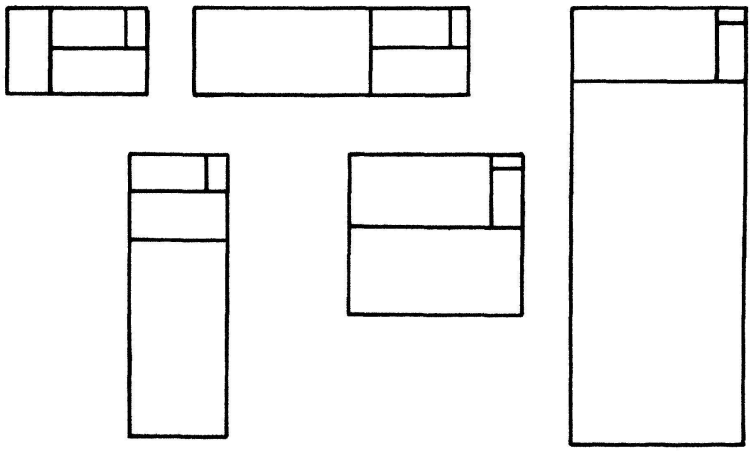


Fig. 3.

Analog erhält man durch Anfügen von einem (1:2)-Rechteck an diejenigen der Ordnung 5, von einem (2:5)-Rechteck an diejenigen der Ordnung 4 oder durch Zusammenlegen der beiden Rechtecke der Ordnung 3 insgesamt 55 nichtähnliche Rechtecke, die in 6 paarweise inkongruente (1:2)-Rechtecke mit Randrechteck zerlegt sind. Es zeigt sich, dass unter all diesen zerlegten Rechtecken der Ordnung 6 keines das Seitenverhältnis 2:3 hat. Damit kann durch Anlagerung eines (1:2)-Rechtecks aus einem solchen Rechteck der Ordnung 6 kein perfektes (1:2)-Rechteck der Ordnung 7 erhalten werden. Analog gibt es auch kein Rechteck der Ordnung kleiner oder gleich 5 mit dem Seitenverhältnis von 5:8. Eine Anlagerung eines (2:5)-Rechtecks an ein bereits zerlegtes Rechteck liefert somit auch keine perfekte Zerlegung. Alle Kombinationen von Rechtecken der Ordnungen kleiner als 5 ergeben ebenfalls kein perfektes (1:2)-Rechteck.

4. Einfache Zerlegungen

Nachdem perfekte Zerlegungen eines (1:2)-Rechteckes ausgehend von zerlegten Rechtekken der Ordnung kleiner als 7 mit Randrechtecken ausgeschlossen wurden, werden nun alle einfachen Zerlegungen von Rechtecken in paarweise inkongruente (1:2)-Rechtecke betrachtet.

Einfachste topologische Überlegungen liefern, dass einfache Zerlegungen eines Rechtecks erstmals bei Ordnung 5 möglich wären. Fig. 4 zeigt dabei die einzige Möglichkeit der prinzipiellen Anordnung der Teilrechtecke. Jedes der 5 Teilrechtecke kann nun horizontal oder vertikal angeordnet sein. Diese 32 Fälle führen auf ebensoviele Gleichungssysteme mit jeweils 4 Gleichungen und 5 Unbekannten. Berücksichtigt man noch die Decktransformation des Rechtecks, so reduziert sich diese Anzahl noch. Das Lösen der Gleichungssysteme liefert die in Fig. 2 gezeigten Möglichkeiten als einzige Realisierungen. Um ein einfaches Rechteck der Ordnung 6 zu ermitteln, müsste in der Konfiguration aus Fig. 4 genau ein Teilrechteck ergänzt werden. Dies ist jedoch unmöglich, wie man leicht erkennt.

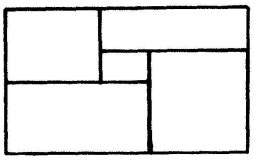


Fig. 4.

Anordnungen für einfach zerlegte Rechtecke der Ordnung 7 erhält man bei Anlagerung von 2 Teilrechtecken an eine Ecke in Fig. 4. Vergleicht man mit [12], so zeigt sich, dass nur die in Fig. 5 dargestellten Zerlegungen prinzipiell möglich sind.

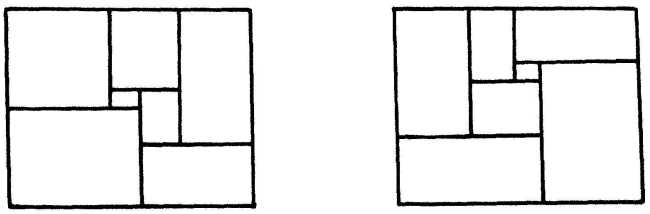
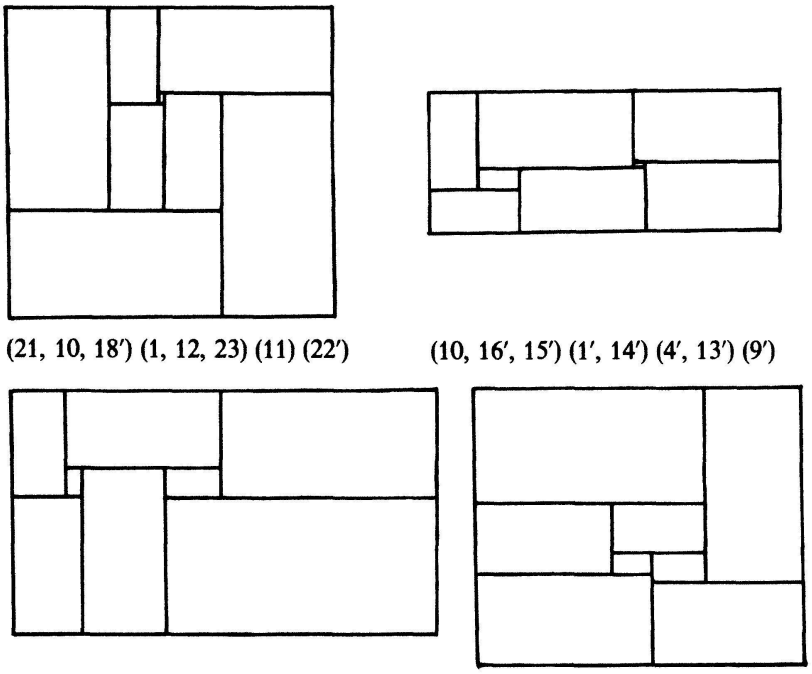


Fig. 5.



(21, 10, 18′) (1, 12, 23) (11) (22′) (10, 16′, 15′) (1′, 14′) (4′, 13′) (9′)

(11, 16′, 22′) (3, 17, 6′) (14) (28′) (12′, 10) (7′, 5′) (2′, 3′) (9′) (8′)

Fig. 6.

Analog der Ordnung 5 ergeben sich somit $2 \cdot 2^7 = 256$ Gleichungssysteme von 6 Gleichungen mit 7 Variablen. Löst man auch diese Systeme unter Berücksichtigung äquivalenter Ergebnisse, so erhält man 42 verschiedene Realisierungen. Bis zur Ordnung 7 existieren folglich 44 einfach zerlegte Rechtecke, wobei keines perfekt zerlegt ist. Bemerkenswert ist ein Rechteck des Seitenverhältnisses 2:3, welches nach Anlagerung eines (1:2)-Rechtecks ein perfektes (1:2)-Rechteck liefert. Dieses ist in Fig. 1 dargestellt. Alle 44 einfach zerlegten Rechtecke der Ordnung kleiner gleich 7 sind in Tabelle 1 mit ihrer Codierung aufgeführt. Untersucht man nach der gleichen Methode alle einfach zerlegten Rechtecke der Ordnung 8, so finden sich bei 4 verschiedenen topologischen Varianten insgesamt 148 nichtäquivalente Lösungen. Eine vollständige Liste aller durch paarweise inkongruente (1:2)-Rechtecke einfach zerlegten Rechtecke ist im Besitz des Autors. Es existiert kein einfach und perfekt zerlegtes Rechteck der Ordnung 8. Ein Beispiel jeder topologischen Variante ist in Fig. 6 dargestellt. Für einfache Zerlegungen gilt somit

Satz 1: *Es existieren 2, 42 bzw. 148 verschiedene einfache Zerlegungen der Ordnungen 5, 7 bzw. 8 von Rechtecken in paarweise inkongruente (1:2)-Rechtecke.*

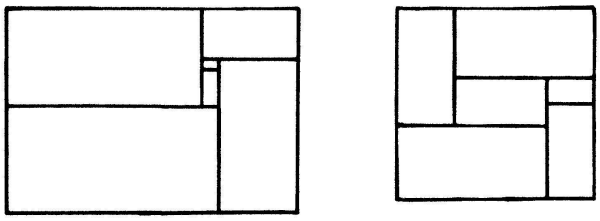
5. Zerlegungen mit Teilrechtecken

In der Analyse aller möglichen Rechteckzerlegungen in paarweise inkongruente (1:2)-Rechtecke fehlen noch Rechtecke, die kein Randrechteck besitzen und nicht einfach sind. Dies sind solche Rechtecke, die ein Teilrechteck aus wenigstens 2 und maximal $n-1$ (1:2)-Rechtecken enthalten und kein Randteil aus einem oder mehreren Teilrechtecken besitzen.

Tabelle 1. Vollständige Liste der durch (1:2)-Rechtecke perfekt und einfach zerlegten Rechtecke bis zur Ordnung 7

l.Nr.	Höhe	Breite	Code	Ordnung	H / B
1	17	38	(8',4',7')(2,3')(10')(9')	7	447368
2	41	86	(20',8,19')(2,3')(22')(21')	7	476744
3	20	38	(6,7',9')(5',2')(11')(8')	7	526316
4	48	90	(14,15',23')(13',4)(25')(20')	7	533333
5	45	78	(16,12',19')(10,7')(26')(13')	7	576923
6	103	172	(36,20',48')(26,14)(55')(31')	7	598837
7	53	86	(18,14,27')(1',26')(8')(17')	7	616279
8	111	180	(38,30,56')(2,55')(16')(35')	7	616667
9	27	42	(10,6,13')(4,1')(14')(7')	7	642857
10	49	76	(18,10,24')(8,2)(25')(13')	7	644737
11	53	80	(23',8,13')(3',20)(7')(30')	7	662500
12	18	27	(8',3,4')(1,7)(2')(10')	7	666667
13	103	154	(19',11',47')(4,18)(42)(56')	7	668831
14	23	34	(10',7')(3',8)(13')	5	676471
15	111	162	(52',12,23')(1',44)(14)(59')	7	685185
16	98	143	(46',11,20')(1,39)(12)(52')	7	685315
17	53	76	(25',13')(6,20)(28')	5	697368
18	100	139	(19,14',46')(12,16)(31)(54')	7	719425
19	55	76	(25',13')(6,10')(2',16)(30')	7	723684
20	119	164	(55',27')(14,20')(4,36)(64')	7	725610
21	91	124	(39',23')(16',14)(52',6)(20)	7	733871
22	127	172	(46,44',38)(24,32')(51')(35')	7	738372
23	60	81	(13,12,28')(2',4')(17)(32')	7	740741
24	116	155	(23,20,56')(6',8)(35)(60')	7	748387
25	46	61	(10,7,22')(3,4)(13)(24')	7	754098
26	115	148	(55',19')(18,20)(60',4')(28)	7	777027
27	53	68	(25',9')(8,10)(28',2)(12)	7	779412
28	57	72	(16,15',13')(2',22)(17')(25')	7	791667
29	127	160	(36,35',27')(4,50)(37')(55')	7	793750
30	61	76	(21',17')(2,16')(20,12')(28')	7	802632
31	119	146	(59',28)(3',11')(60',4)(26)	7	815069
32	106	127	(52',23)(6',11)(54',8)(19)	7	834646
33	61	70	(22,24')(10,19')(1',18')(17')	7	871429
34	143	164	(52,56')(24,44')(2,43')(39')	7	871951
35	68	77	(13,22',20)(4',18')(21)(28')	7	883117
36	124	139	(27,38',36)(8,34')(35)(52')	7	892086
37	147	162	(46,30,43')(17',52)(32')(55')	7	907407
38	139	148	(51',23')(14,32)(44,36')(52')	7	939189
39	146	155	(48,35,36')(17,55)(26')(50')	7	941936
40	61	64	(18,23')(13',10')(3',14)(25')	7	953125
41	70	73	(21,26')(16',10')(3,17)(28')	7	958904
42	73	76	(21',17')(6,28)(26,8')(22)	7	960526
43	127	130	(44,20',23')(34,3')(52)(39')	7	976923
44	136	139	(47,20',26')(37,3)(55)(42')	7	978417

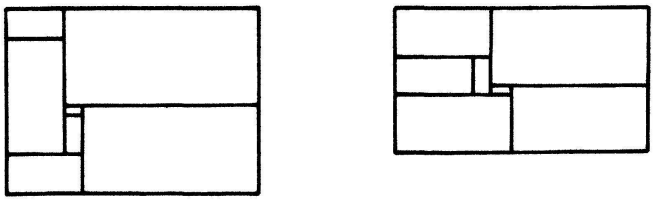
Erstmals tritt diese Möglichkeit bei Ordnung 6 auf, wenn eines der Teilrechtecke von Fig. 4 aus zwei (1:2)-Rechtecken besteht und folglich das Seitenverhältnis 2:5 besitzt. Berücksichtigt man Symmetrien des Rechtecks, kann dieses (2:5)-Teilrechteck entweder in einer Ecke oder im Mittelteil horizontal oder vertikal Platz finden. Diese $4 \cdot 16$ Gleichungssysteme ergeben 17 Rechtecke der Ordnung 6, wobei keines das Seitenverhältnis 2:3 aufweist. Zwei Beispiele zeigt Fig. 7.



(10′, 5′) (1′, 8) (2) (11′) (24, 29′) (19′, 10′) (20) (31′)
Fig. 7.

Um alle Rechtecke der Ordnung 7 mit Teilrechtecken und ohne Randteile zu erhalten, geht man ebenfalls von Fig. 4 aus und legt entweder in eines der Teilrechtecke 3 paarweise inkongruente (1:2)-Rechtecke oder zweimal 2 Teilrechtecke des Seitenverhältnisses 2:5. Bei der Dreierkombination können die Seitenverhältnisse 9:10 und 5:12 auftreten und dies entweder horizontal oder vertikal. Untersucht man auch hier alle auftretenden Gleichungssysteme ergeben sich 67 Zerlegungen von nichtähnlichen Rechtecken in 7 paarweise inkongruente (1:2)-Rechtecke. Fig. 8 zeigt zwei Beispiele dieser Zerlegungen. Da auch hier kein perfektes (1:2)-Rechteck zu finden ist, gilt folglich

Satz 2. *Die Minimalordnung einer perfekten Zerlegung eines (1:2)-Rechtecks ist 8.*



(3′, 10′) (6) (1′, 9′) (2) (4′) (5′, 8′) (4′, 2) (1′, 7′) (6′)
Fig. 8.

6. Perfekte Zusammensetzungen

Um weitere perfekte (1:2)-Rechtecke zu erhalten, ist es zum Beispiel möglich, alle bisher ermittelten Rechtecke zu kombinieren. Einfache Vergleichsoperationen der vorhandenen Seitenverhältnisse gestatten ein Zusammenfügen der verschiedenen Rechtecke zu einem (1:2)-Rechteck. Sind dann alle beteiligten (1:2)-Teilrechtecke untereinander verschieden, so hat man eine perfekte Zerlegung gefunden. Auf diese Weise wurden die in Tabelle 2 aufgeführten perfekten Zerlegungen eines (1:2)-Rechtecks der Ordnungen 13 bis 19 gefunden. Die Zerlegungen der Ordnung 15 und 17 enthalten jeweils ein einfach zerlegtes Teilrechteck der Ordnung 7 (vergleiche Nr. 12 und 15 aus Tabelle 1). Diejenigen der Ordnungen 18 und 19 enthalten ein bzw. zwei einfach zerlegte Teilrechtecke der Ordnung 8.

Tabelle 2. Beispiele für perfekte (1:2)-Rechtecke der Ordnung 13–19

Ordnung	kurze Seite	Codierung
13	140	(58,52,85')(19',55',22)(36',18) (24',10)(11')(2,4')
14	120	(44,40,57',42)(30',27')(8',4,20) (3',36',18)(33')(32')
15	108	(40,32,57',30)(51',6')(3',24)(18) (8,12')(4',16)(28')(9')
16	116	(49,43,37,40',23)(34',6')(35) (42',21)(14',15)(18',9,2')(16')
17	516	(162,180,276',138)(84',42,240') (81')(156',78)(52',12,23')(1',44) (14)(59')
18	688	(272,256,228,248',124)(230',80') (75,85)(56',116)(210',105,10)(95) (16,176')(144')
19	1010	(530',280,340')(272',136)(480',85,15) (70,225)(196',144')(155)(28',116') (12,44)(202')(138')

Zerlegt man das kleinste (1:2)-Teilrechteck der perfekten Zerlegung der Ordnung 13 vermöge der Zerlegung aus Fig. 1, so erhält man ein perfektes (1:2)-Rechteck der Ordnung $13-1+8=20$. Allgemein liefert ein perfektes (1:2)-Rechteck der Ordnung r nach diesem Verfahren ein perfektes (1:2)-Rechteck der Ordnung $r+7$. Da für die Ordnungen 13 bis 19 je ein Exemplar vorliegt, gilt somit

Satz 3: *Für jede natürliche Zahl $n \geq 13$ existiert eine perfekte Zerlegung eines (1:2)-Rechtecks der Ordnung n.*

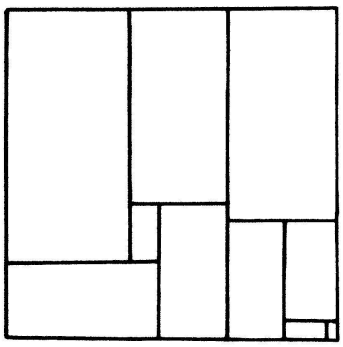
7. Ergänzende Bemerkungen

Nach den bisherigen Ergebnissen scheint naheliegend

Problem 1: Gibt es perfekte Zerlegungen eines (1:2)-Rechteckes der Ordnungen 9 bis 12 bzw. einfach und perfekte Zerlegungen eines (1:2)-Rechteckes?

Eine Verallgemeinerung der Untersuchungen sei formuliert in

Problem 2: Man ermittle bei vorgegebenen natürlichen Zahlen n und m die Minimalordnung einer perfekten Zerlegung eines $(n:m)$-Rechteckes und diskutiere dazu auch einfache Zerlegungen.



(13, 10, 11) (3, 7) (6, 5) (8′) (2′, 1)
Fig. 9.

Eine interessante Zerlegung ist in Fig. 9 gezeigt. Es wird dabei ein Quadrat in paarweise inkongruente (1 : 2)-Rechtecke zerlegt. Die Ordnung dieser Zerlegung ist zehn. Auf Grund der vollständig behandelten Rechteckzerlegungen in paarweise inkongruente (1 : 2)-Rechtecke bis zur Ordnung 7 existiert als untere Grenze für die Minimalordnung einer Zerlegung eines Quadrates in paarweise verschiedene (1 : 2)-Rechtecke die Zahl 8. Damit eröffnet sich

Problem 3: Existiert einer Zerlegung eines Quadrates in acht oder neun paarweise inkongruente (1 : 2)-Rechtecke?

Verallgemeinernd soll diese Fragestellung formuliert werden in

Problem 4: Man gebe zu vorgegebenen natürlichen Zahlen n und m Zerlegungen eines Quadrates in paarweise inkongruente $(n:m)$-Rechtecke an und bestimme deren Minimalordnung.

Carsten Müller, Friedrich-Schiller-Universität, Sektion Mathematik, Jena

LITERATUR

1 Betke U.: Zerlegungen konvexer Polygone. (Manuskript).
2 Bleicher M. N.: Decomposition of a k-gon by l-gons Mitt. Math. Sem. Giessen *166*, 1–16 (1984).
3 Rouwcamp C. J.: Table of DUBLETS of order up to 18 (first four pages).
4 Bouwcamp C. J., Duijevestijn A. J. W. and Medema P.: Tables relating to simple squared rectangles of order nine through fifteen; Technische Hogeschool, Endhoven, 1960.
5 Duijvestijn A. J. W.: Electronic computation of squared rectangles. Philips Research Reports *17/6*, 523–613 (1962).
6 Duijvestijn A. J. W., Federico P. J. and Leeuw P.: Compound perfect squares. Amer. Math. Monthly *89 (1)* (1982).
7 Duijvestijn A. J. W.: Simple perfect squared square of lowest order. Journal of comb. Theory B *25* 240–243 (1978).
8 Federico P. J.: Note on some low-order perfect squared squares. Canad. Jour. Math. *15*, 350–363 (1963).
9 Federico P. J.: Squaring rectangles and squares. A historical review with annotated bibliography. Graph theory and related topics. Acad. Press Inc. 173–196 (1979).
10 Kaiser H.: Perfekte Polyederzerlegungen. Wiss. Tagungen der TU Karl-Marx-Stadt. *3*, 19–20 (1988)
11 Müller C.: Zerlegungen von Quadraten in kleinere Quadrate. Tagung der MGdDDR, Holzhau, April 1988.
12 Jaglom I. M.: Wie zerlegt man ein Quadrat? Nauka, Moskau, 1968 (russisch).

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/90/040098-09$1.50 + 0.20/0