

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 45 (1990)
Heft: 4

Artikel: Kettenwurzeln und Kettenoperationen
Autor: Laugwitz, D.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-42415>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Vol. 45

Nr. 4

Seiten 89–116

Basel, Juli 1990

Kettenwurzeln und Kettenoperationen

Vorbemerkungen

Die Kettenbrüche

$$\frac{1}{p_1 + \frac{1}{p_2 + \frac{1}{p_3 + \dots}}}$$

und die unendlichen Reihen

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots,$$

die man auch als Kettensummen bezeichnen könnte, sollen hier als spezielle Kettenoperationen aufgefasst werden. Sei $f(x) > 0$ für $x > 0$, und sei p_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Dann soll die Folge betrachtet werden

$$P_1 = f(p_1), \quad P_2 = f(p_1 + f(p_2)), \quad P_3 = f(p_1 + f(p_2 + f(p_3))), \dots \quad (1)$$

Kettenbrüche erhält man für $f(x) = x^{-1}$, unendliche Reihen für $f(x) = x$. Für den Grenzwert von (1), falls er existiert, will ich schreiben $f(\langle p_n \rangle)$.

Für $f(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, erhält man Kettenwurzeln. Bekannte Beispiele für quadratische Kettenwurzeln sind

$$\sqrt{\langle 1 \rangle} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \sqrt{\langle 2 \rangle} = 2.$$

Auf einem kleinen Taschenrechner kann man sehr schnell und bequem folgende Werte berechnen:

$$\sqrt{\langle n \rangle} = 1,757932757; \quad \sqrt{\langle n^n \rangle} = 2,066176687; \quad \sqrt{\langle n!^n \rangle} = 2,618086580. \quad (2)$$

Man sieht, dass sogar sehr schnell wachsende Folgen p_n auf konvergente quadratische Kettenwurzeln führen können.

Merkwürdigerweise scheint es bisher kaum systematische allgemeine Überlegungen zu Kettenoperationen zu geben. Einiges findet man in [3], allerdings nur für den Fall der quadratischen Kettenwurzeln. Das dort angegebene Konvergenzkriterium werde ich im Abschnitt 1 noch einmal und etwas kürzer beweisen. Die Beweisidee lässt sich auf gewisse monoton wachsende Funktionen $f(x)$ und insbesondere auf beliebige Kettenwurzeln übertragen (Abschnitt 2). Es ist merkwürdig, dass hier sehr einfache notwendige und zugleich hinreichende Bedingungen existieren.

Teilresultate für monoton fallende $f(x)$ gebe ich in Abschnitt 3 an. Es ist mir aber nicht gelungen, ein Analogon zu dem schönen Kriterium für Kettenbrüche (bei $p_n > 0$) zu finden, welches schon aus den vierziger Jahren des 19. Jahrhunderts stammt [2]: Der Kettenbruch $\langle p_n \rangle^{-1}$ konvergiert genau dann, wenn die unendliche Reihe $\langle p_n \rangle^{+1} = \sum p_n$ divergiert.

1. Konvergenz von quadratischen Kettenwurzeln

Da $f(x) = \sqrt{x}$ für $x \geq 0$ positiv und monoton wachsend ist, gilt das gleiche für die Folge der Näherungswurzeln P_n aus (1). Sie konvergiert daher genau dann, wenn sie beschränkt ist. Damit hat man sofort den

Vergleichstest

Wenn $0 \leq p_n \leq q_n$ für alle n , und wenn $\sqrt{\langle q_n \rangle}$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sqrt{\langle p_n \rangle}$.

Sei insbesondere $q_n = b^{(2^n)}$ für ein $b > 0$. Die zugehörige Folge Q_n , nach (1) gebildet, konvergiert dann, und es gilt $\sqrt{\langle q_n \rangle} = b \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Daher konvergiert $\sqrt{\langle p_n \rangle}$, wenn für ein $b > 0$ und alle n gilt $p_n \leq b^{(2^n)}$.

Diese Bedingung ist auch notwendig. Es gilt nämlich

$$P_1 = \sqrt{p_1} = p_1^{(2^{-1})},$$

$$P_2 = \sqrt{p_1 + \sqrt{p_2}} > \sqrt[4]{p_2} = p_2^{(2^{-2})},$$

...

$$P_n = \sqrt{p_1 + \sqrt{\dots + \sqrt{p_n}}} > \sqrt[2^n]{p_n} = p_n^{(2^{-n})}.$$

Falls P_n konvergiert und b eine obere Schranke aller dieser Näherungswurzeln ist, folgt $p_n \leq b^{(2^n)}$. Etwas anders formuliert, folgt das

Konvergenzkriterium für quadratische Kettenwurzeln

Notwendig und hinreichend für die Konvergenz von $\sqrt{\langle p_n \rangle}$ ($p_n \geq 0$) ist die Existenz einer reellen Zahl B so, dass

$$2^{-n} \log p_n \leq B \quad \text{für alle } n.$$

Äquivalent dazu sind $\overline{\lim} 2^{-n} \log p_n < \infty$ oder $\overline{\lim} p_n^{1/2^n} < \infty$.

Aus dem Kriterium kann man noch eine gute Fehlerabschätzung erhalten. Ich setze bei gegebenen p_n und N jetzt $q_n = p_n$ für $n < N$ und, falls $p_n \leq b^{(2^n)}$ für $n \geq N$, $q_n = b^{(2^n)}$ für $n \geq N$. Dann ist $P_n \leq P = \sqrt{\langle p_n \rangle} \leq \sqrt{\langle q_n \rangle} = Q$. Nun setze ich noch

$$r_n = q_n = p_n \quad \text{für } n < N, \quad r_N = b^{(2^N)} \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad r_n = 0 \quad \text{für } n \geq N + 1$$

und erhalte $Q = R = \sqrt{\langle r_n \rangle}$. Die Fehlerschranke

$$R - P_N \geq P - P_N \geq 0$$

kann in endlich vielen Schritten berechnet werden. Mit dieser Fehlerschranke ist die Genauigkeit der Zahlenbeispiele (2) auf die hingeschriebenen Dezimalen ermittelt worden, unter Verwendung der folgenden geringfügigen Verbesserung. Wenn nämlich die Folge $2^{-n} \log p_n$ für $n \geq N$ nicht wächst, kann man $\log b = 2^{-N} \log p_N$ setzen, d. h.

$$r_N = p_N \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad r_n = 0 \quad \text{für } n \geq N + 1.$$

Direktes Ausrechnen zeigt, dass für die beiden letzten Beispiele in (2) genügt $N = 8$, und für $\sqrt{\langle n \rangle}$ reicht $N = 17$.

2. Allgemeine Kettenwurzeln

Es sei $f(x) > 0$ für $x > 0$ monoton nicht fallend, beispielsweise $f(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha$. Wieder ist eine notwendige Konvergenzbedingung für $f(\langle p_n \rangle)$, dass die Partialnäherungen P_n aus (1) beschränkt sind. Für eine gegebene Folge $p_n \geq 0$ hat man stets

$$P_1 = f(p_1), \quad P_2 = f(p_1 + f(p_2)) \geq f(f(p_2)) = f^2(p_2);$$

...

$$P_n = f(p_1 + f(p_2 + \dots + f(p_n) \dots)) \geq f^n(p_n).$$

Daraus folgt, dass die Existenz eines B mit $f^n(p_n) \leq B$ für alle n eine notwendige Konvergenzbedingung ist. Offensichtlich ist diese Bedingung aber im allgemeinen nicht hinreichend. Bei den unendlichen Reihen ist $f(x) = x$, also $f^n(p_n) = p_n$, und die Bedingung sagt nur aus, dass $p_n \leq B$ für alle Glieder der Reihe $\sum p_n$. Man wird daher zusätzliche Voraussetzungen an $f(x)$ machen, und es ist im Hinblick auf den speziellen Fall der quadratischen Kettenwurzeln naheliegend, das Wachstum von $f(x)$ zu beschränken.

Ich nehme jetzt an, dass es ein α gibt mit $0 < \alpha < 1$ und x_0, B so dass

$$f(ax) \leq a^\alpha f(x) \quad \text{für alle } a \geq 1, \quad x \geq x_0 > 0 \tag{3}$$

und $f^n(p_n) \leq B$ für alle n .

Das ist für Kettenwurzeln erfüllt, $f(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, aber auch für Kettenlogarithmen, $f(x) = \log(1+x)$.

Sei nun $x_2 > x_1 > x_0$. Dann hat man

$$0 \leq f(x_2) - f(x_1) = f\left(\frac{x_2}{x_1}x_1\right) - f(x_1) \leq \left[\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^\alpha - 1\right]f(x_1).$$

Daraus sieht man, dass $f(x)$ für $x > x_0$ stetig ist. Ich nehme zusätzlich noch an, dass $f(x)$ streng monoton wächst für $x > x_0$ und bezeichne die für $t > x_0$ definierte inverse Funktion mit $f^{-1}(t) = g(t)$. Es gibt jedenfalls ein x' mit $f(x) < x < g(x)$ für alle $x \geq x'$, und ich kann annehmen, dass $x' > x_0$. Außerdem kann die Schranke B durch jede größere Zahl ersetzt werden, und ich nehme noch $B \geq x'$ an.

Unter all diesen Annahmen folgt zunächst $p_n \leq g^n(B)$ und dann

$$P_1 = f(p_1) \leq f(g(B)) = B = Q_1,$$

$$P_2 = f(p_1 + f(p_2)) \leq f(g(B) + f(g^2(B))) = f(2g(B)) \leq 2^\alpha f(g(B)) = 2^\alpha B = Q_2,$$

$$\begin{aligned} P_3 &= f(p_1 + f(p_2 + f(p_3))) \leq f(p_1 + f(g^2(B) + f(g^3(B)))) \\ &\leq f((1 + 2^\alpha)g(B)) \leq (1 + 2^\alpha)^\alpha B = Q_3. \end{aligned}$$

Vollständige Induktion gibt

$$P_n = f((1 + q_{n-1})g(B)) \leq q_n B = Q_n,$$

wobei ich gesetzt habe

$$q_{k+1} = (1 + q_k)^\alpha, \quad q_1 = 1, \quad q_{k+1} > 1 \quad \text{für } k \geq 1.$$

Sei $h(x) = (1 + x)^\alpha$. Für $x \geq 1$ gilt

$$0 < h'(x) = \frac{\alpha}{(1+x)^{1-\alpha}} \leq \frac{\alpha}{2^{1-\alpha}} < 1.$$

Daher konvergiert die Folge q_n von unten gegen den Fixpunkt q von $h(x)$, und es gilt $P_n \leq Q_n \leq qB$ für alle n . Die Folge P_n ist mithin beschränkt, also konvergent. Damit ist bewiesen:

Konvergenzkriterium für Kettenwurzeln

Notwendig und hinreichend für die Konvergenz von $\langle p_n \rangle^\alpha$ bei $0 < \alpha < 1$, $p_n \geq 0$, ist $\alpha^n \log p_n \leq C$ für ein reelles C .

(Die Bedingung $f^n(p_n) \leq B$ ist nämlich äquivalent zu $p_n^{(\alpha^n)} \leq B$, also zu $\alpha^n \log p_n \leq \log B = C$.)

Eine Fehlerabschätzung erhält man wie im Spezialfall der quadratischen Kettenwurzeln. Tatsächlich hat der Beweis etwas mehr gezeigt:

Satz 1. Es sei $f(x)$ für $x > 0$ positiv und monoton nicht fallend, und $f(ax) \leq a^\alpha f(x)$ für alle $a \geq 1$, $x \geq x_0$, wobei $0 < \alpha < 1$. Ferner sei $f(x)$ streng monoton wachsend für $x \geq x'$. Dann ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz von $f(\langle p \rangle)$, dass $\lim f^n(p_n) < \infty$.

Es sei ausdrücklich bemerkt, dass sich das Kriterium nicht auf den Grenzfall $\alpha = 1$ ausdehnen lässt, welcher die unendlichen Reihen umfasst.

3. Reziproke Kettenpotenzen und reziproke Kettenwurzeln: Abnehmendes $f(x)$

In Verallgemeinerung der Kettenbrüche mit $f(x) = x^{-1}$ untersuche ich jetzt $f(x) = x^{-\alpha}$ für $\alpha > 0$. Ich will bei $0 < \alpha < 1$ von reziproken Kettenwurzeln sprechen; die naheliegende englische Bezeichnung «continued reciprocal roots» ist allerdings treffender.

Sei zunächst allgemeiner $f(x)$ für $x > 0$ positiv monoton nicht wachsend; ich werde kurz monoton fallend sagen.

Wieder sei die Folge P_n durch (1) definiert für eine gegebene Folge p_n . Dann ergeben die Voraussetzungen der Positivität und Monotonie

$$P_1 = f(p_1) \geq 0$$

$$0 \leq P_2 = f(p_1 + f(p_2)) \leq f(p_1) = P_1$$

und ebenso mit nichtnegativen r_n für $n > 2$

$$P_n = f(p_1 + r_n) \leq P_1.$$

Die Folge P_n ist also beschränkt. Nun sind die verschachtelten Funktionen in der Definition von P_n , je nach der in ihnen auftretenden Anzahl von Funktionszeichen f , abwechselnd fallend und wachsend, und es folgt

$$(P_0 =) 0 \leq P_2 \leq \dots \leq P_{2n-2} \leq P_{2n} \leq P_{2n+1} \leq P_{2n-1} \leq \dots \leq P_1. \quad (4)$$

Daher existieren die Grenzwerte

$$\underline{P} = \lim P_{2n} \leq \lim P_{2n+1} = \bar{P}, \quad (5)$$

und wir haben:

Satz 2. Notwendig und hinreichend für die Konvergenz von P_n bei fallendem positivem $f(x)$ (für $x > 0$) ist $\lim (P_{n+1} - P_n) = 0$, und ebenso $\underline{P} = \bar{P} (= P = f(\langle p_n \rangle))$.

Daraus folgen hinreichende Konvergenzbedingungen. Sei $f'(x)$ stetig und $f'(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$. Dann ist nach dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned}|P_2 - P_1| &= |f(p_1 + f(p_2)) - f(p_1)| \\&\leq |f'(p_1)| \cdot f(p_2), \\|P_3 - P_2| &= |f(p_1 + f(p_2 + f(p_3))) - f(p_1 + f(p_2))| \\&\leq |f'(p_1)| \cdot |f'(p_2)| \cdot f(p_3), \\&\dots \\|P_{n+1} - P_n| &\leq |f'(p_1)| \cdot |f'(p_2)| \dots |f'(p_n)| \cdot f(p_{n+1}),\end{aligned}$$

und man erhält:

Korollar 1. Für stetig ableitbares, monoton fallendes $f(x)$ mit $f'(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ und $p_n \rightarrow \infty$ konvergiert P_n .

Korollar 2. Da es bei $f'(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ zu $0 < q < 1$ ein $\bar{x} = \bar{x}(q)$ so gibt, dass $|f'(x)| \leq q$ für $x \geq \bar{x}$, konvergiert P_n , wenn alle $p_n \geq \bar{x}$, und es ist

$$|P_{n+1} - P_n| \leq q^n f(\bar{x}).$$

Bei $f(x) = x^{-\alpha}$, $0 < \alpha$, ist $|f'(x)| \leq \left| \frac{-\alpha}{\bar{x}^{1+\alpha}} \right| < 1$ für $x \geq \bar{x} > \alpha^{1/1+\alpha}$. Reziproke Quadrate $\langle p_n \rangle^{-2}$ konvergieren also sicher, wenn $\inf(p_n) > \sqrt[3]{2} = 1,26$, und reziproke Quadratwurzeln $\langle p_n \rangle^{-1/2}$ für $\inf(p_n) > \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} = 0,63$.

Es ist bei der groben Abschätzung aus Korollar 2 nicht zu erwarten, dass die Grenze $\alpha^{1/1+\alpha}$ optimal ist. Das wird sich im nächsten Abschnitt bestätigen.

4. Beispiele: Konstante Folgen $p_n = p > 0$

Diese einfachsten Spezialfälle geben einige weitere Hinweise. Hier ist

$$P_1 = f(p), \quad P_2 = f(p + f(p)) = f(p + P_1), \dots$$

und man hat die nichtlineare Differenzengleichung 1. Ordnung

$$P_{n+1} = f(p + P_n), \quad P_0 = 0. \tag{6}$$

Es sei $f(x)$ stetig, positiv und monoton nicht wachsend für $x > p$. Falls $\lim P_n = P$ existiert, ist $\underline{P} = \bar{P} = P$, und P eine Lösung der Fixpunktgleichung $x = f(p + x)$.

Iterationsverfahren mit einem Parameter p , $P_{n+1} = f(p, P_n)$, sind neuerdings viel untersucht worden. Ein beliebtes Beispiel ist $P_{n+1} = 1 - p P_n^2$ [1].

Aus

$$P_{n+2} = f(p + f(p + P_n)) \quad (7)$$

und (5) folgt, dass \underline{P} und \bar{P} positive Wurzeln der Gleichung

$$x = f(p + f(p + x)) = \phi(x). \quad (8)$$

sind.

Satz 3. Sei $f(x)$ für $x > 0$ positiv, stetig und monoton nicht wachsend. Wenn (8) nur eine einzige positive Wurzel $x = P$ hat, so gilt $P = f(p)$, und die Iteration (6) konvergiert gegen diesen Wert.

Ich betrachte speziell die reziproken Kettenwurzeln $\langle p \rangle^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Hier ist

$$\phi(x) = (p + (p + x)^{-\alpha})^{-\alpha}$$

monoton wachsend zwischen $\phi(-p) = 0 > -p$ und $\phi(\infty) = p^{-\alpha} < \infty$. Die Ableitung

$$\phi'(x) = \alpha^2 [p(p + x) + (p + x)^{1-\alpha}]^{-\alpha-1}$$

ist für $x > -p$ positiv und fällt monoton von $\phi'(-p) = \infty$ zu $\phi'(\infty) = 0$. Daher hat die stetige Kurve $y = \phi(x)$ genau einen positiven Schnittpunkt mit der Geraden $y = x$, und für diesen gilt $x = \underline{P} = \bar{P} = P$:

Satz 4. Für jedes $p > 0$ und jedes α , $0 < \alpha < 1$, konvergiert (6) gegen den Wert der reziproken Kettenwurzel $\langle p \rangle^{-\alpha}$.

Der Beweis gilt auch für $\alpha = 1$, doch hat man für die Kettenbrüche die bessere Bedingung aus [2].

Es sei jetzt $\alpha = 2$.

Zu untersuchen ist hier die Differenzengleichung

$$P_{n+1} = \frac{1}{(p + P_n)^2}, \quad P_0 = 0. \quad (9)$$

Im Falle der Konvergenz $\lim P_n = P$ ist P Lösung der Gleichung

$$x = \frac{1}{(p + x)^2}, \quad (10)$$

also Nullstelle des kubischen Polynoms

$$Q_3(x) = x(p + x)^2 - 1 = x^3 + 2px^2 + p^2x - 1. \quad (11)$$

Wegen $p > 0$ hat dieses Polynom genau eine reelle Nullstelle x_0 , $0 < x_0 < 1$; für $p \approx 0$ gilt $x_0 \approx 1$, für $p \approx 1$ gilt $x_0 \approx 0,47$.

Ich suche nun nach den Werten von \underline{P} , \bar{P} . Die Gleichung (8) führt auf ein Polynom vom Grade 5

$$\begin{aligned} Q_5(x) = & p^2 x^5 + x^4 (4 p^3 - 1) + x^3 \cdot 2 p (3 p^3 - 1) \\ & + x^2 \cdot 2 p^2 (2 p^3 - 1) + x (p^3 - 1)^2 - p^4. \end{aligned}$$

Da alle Nullstellen von Q_3 auch solche von Q_5 sein müssen, wird die Division ohne Rest ausführbar sein. Es ergibt sich

$$Q_5(x) = Q_3(x) \cdot Q_2(x)$$

mit

$$Q_2(x) = p^2 x^2 + (2 p^3 - 1) x + p^4.$$

Die Nullstellen von Q_2 sind

$$x_{1,2} = \frac{(1 - 2 p^3) \pm \sqrt{1 - 4 p^3}}{2 p^2} \quad (12)$$

Mit Satz 3 und (5) folgt:

Die Folge (9) für das «reziproke Kettenquadrat» konvergiert für $p \geq \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = p_0 = 0.63$ gegen die einzige reelle Wurzel von (11).

(Diese ist bei $p = p_0$ übrigens selbst gleich p_0 , und es gilt sogar $x_0 = x_1 = x_2 = p_0$.)
Sei nun $p < p_0$. Dann sind wegen

$$\begin{aligned} (1 - 2 p^3)^2 &= 1 - 4 p^3 + 4 p^6 \\ &> \sqrt{1 - 4 p^3}^2 \end{aligned}$$

beide Werte von (12) positiv.

Durch Einsetzen in (11) folgt $Q_3(x_1) > Q_3(x_0) = 0 > Q_3(x_2)$, und da $Q_3(x)$ für $x \geq 0$ monoton wächst, gilt $x_1 > x_0 > x_2 > 0$.

Nun sind x_0, x_1, x_2 als einzige Lösungen von (8) auch die einzigen Kandidaten für \underline{P} und \bar{P} . Wann kann $x_0 = \underline{P}$ oder $x_0 = \bar{P}$ eintreten? Es ist für $0 < p < p_0$

$$\begin{aligned} \phi'(x_0) &= f'(p + f(p + x_0)) f'(p + x_0) \\ &= (f'(p + x_0))^2 = \frac{4}{(p_0 + x_0)^6} = 4 x_0^3 > 4 p_0^3 = 1, \end{aligned}$$

weil aus $Q_3(x_0) = 0$ wegen (11) folgt, dass x_0 wächst, wenn p abnimmt. Für $0 < p < p_0$ ist x_0 daher ein abstoßender Fixpunkt von $\phi(x)$, und $\underline{P} = x_0$ oder $\bar{P} = x_0$ kann nur eintreten, wenn $P_0 = x_0$ oder $P_1 = x_0$ als Anfangsbedingung gegeben ist. Dann ist $P_n = x_0$ für alle $n \geq 1$. Ansonsten bleibt nur $\underline{P} = x_2 < x_1 = \bar{P}$ mit $P_{2n} \rightarrow \underline{P} = x_2$, $P_{2n+1} \rightarrow \bar{P} = x_1$. Das Paar $\{x_2, x_1\}$ nennt man einen *Attraktor*.

5. Die Existenz divergenter Folgen P_n

Wieder sei $f(x)$ monoton fallend und stetig. Der Einfachheit halber sei $f(0) = \infty$, $f(\infty) = 0$. Bisher haben wir hinreichende Bedingungen für Konvergenz kennengelernt. Jetzt soll gezeigt werden, dass es $p_n > 0$ so gibt, dass P_n divergiert, also $\underline{P} < \bar{P}$ gilt.

Ich definiere zunächst für eine gegebene Folge $p_n > 0$:

$F_1(x) = f(x)$, $F_2(x) = f(p_1 + f(x))$, $F_3(x) = f(p_1 + f(p_2 + f(x)))$, allgemein $F_n(x) = F_{n-1}(p_{n-1} + f(x))$. Es ist $F_n(p_n) = P_n$ und

$$F_1(\infty) = 0, \quad F_1(0) = \infty,$$

$$F_2(\infty) = P_1, \quad F_2(0) = 0,$$

$$F_3(\infty) = P_2, \quad F_3(0) = P_1,$$

allgemein

$$F_n(\infty) = F_{n-1}(p_{n-1} + f(\infty)) = P_{n-1},$$

$$F_n(0) = F_{n-1}(p_{n-1} + f(0)) = F_{n-1}(\infty) = P_{n-2}.$$

Die $F_n(x)$ sind monotone Funktionen. Daher gilt:

Für $n \geq 3$ ist der Wertebereich von $F_n(x)$ das Intervall mit den Enden P_{n-1} und P_{n-2} ; der Wertebereich von F_1 ist $[0, \infty)$, der von F_2 ist $[0, P_1]$. Jetzt konstruiere ich p_n mit $\underline{P} < \bar{P}$. Ich wähle beliebige positive p_1, p_2 und positive Zahlen a_k so, dass für das gegebene $f(x)$ gilt

$$\sum_{k=3}^{\infty} a_k < P_1 - P_2 = f(p_1) - f(p_1 + f(p_2)).$$

Für ein hinreichend kleines positives $b_3 \leq a_3$ wird $P_1 - b_3$ im Innern des Wertebereichs von F_3 liegen, und man kann p_3 so wählen, dass $P_1 - b_3 = F_3(p_3)$. Diesen Wert $F_3(p_3)$ nenne ich P_3 . Induktiv wähle ich entsprechende $b_k \leq a_k$ klein genug und dann p_{2n+1}, p_{2n+2} so dass

$$P_{2n-1} - b_{2n+1} = F_{2n}(p_{2n} + f(p_{2n+1}))$$

$$P_{2n} + b_{2n+2} = F_{2n+1}(p_{2n+1} + f(p_{2n+2})).$$

Die gefundenen Werte nenne ich P_{2n+1} und P_{2n+2} .

Für $n \rightarrow \infty$ folgt

$$\bar{P} = \lim P_{2n+1} = \lim (P_1 + (P_3 - P_1) + \dots + (P_{2n+1} - P_{2n-1}))$$

$$= P_1 - \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k+1},$$

$$\underline{P} = P_2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k},$$

und schliesslich

$$\bar{P} - \underline{P} = P_1 - P_2 - \sum_{j=3}^{\infty} b_j \geq P_1 - P_2 - \sum_{j=3}^{\infty} a_j > 0.$$

Für jede so definierte Folge $p_n > 0$ divergiert $f(\langle p_n \rangle)$.

D. Laugwitz, TH Darmstadt

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 Collet, P., Eckmann J.-P.: Iterated maps on the interval as dynamical systems. Birkhäuser 1986.
- 2 Perron O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen, Bd. 2, 3. Auflage. Stuttgart 1957, p. 46.
- 3 Sizer W. S.: Continued roots. Math. Magazine 59, 23–27 (1986).

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/90/040089-10\$1.50 + 0.20/0

Perfekte Rechteckzerlegung

1. Ausgangspunkt

Innerhalb der elementaren Zerlegungsprobleme der euklidischen Geometrie der Ebene ist die Frage nach perfekten Zerlegungen von Polygonen interessant. Dabei wird der Begriff der perfekten Zerlegung gegeben durch

Definition 1: Eine Zerlegung eines Polygons P in Polygone P_1, P_2, \dots, P_n heisst perfekt genau dann, wenn alle Polygone P_j ähnlich zum Polygon P und paarweise inkongruent sind.

Die Zahl n heisst dabei die Ordnung der Zerlegung.

Aus Untersuchungen von Bleicher [2] und Betke [1] folgt, dass sich konvexe Polygone mit mehr als vier Ecken nicht perfekt zerlegen lassen. In [10] gibt Kaiser für jedes Dreieck die minimale Ordnung seiner perfekten Zerlegung an.

Das Auffinden perfekter Quadratzerlegungen und die Suche nach der Minimalordnung solcher Zerlegungen kann in einer ganzen Reihe von Beiträgen nachvollzogen werden ([3]–[9]). Der Autor plant eine Veröffentlichung seiner Überlegungen zu diesem Problemkreis, die er schon in [11] vorstellte. Kernstück ist darin der Beweis der Tatsache, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 24$ eine perfekte Quadratzerlegung der Ordnung n existiert. Zudem sind Quadratzerlegungen der Ordnungen 21 und 22 bekannt sowie der Beweis, dass mit weniger als 21 Teilquadranten keine perfekte Zerlegung eines Quadrates existiert ([7]). Offen bleibt lediglich die Frage nach einer perfekten Quadratzerlegung der Ordnung 23. Ziel dieser Arbeit ist es, für ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis 1:2 perfekte Zerlegungen anzugeben. Es wird dabei mit ganzzahligen Längenangaben gearbeitet. Die Angaben beziehen sich dabei stets auf die kleineren Rechteckseiten und sind so gekürzt, dass der grösste gemeinsame Teiler aller an einer Zerlegung beteiligter Längen gleich 1 ist.