Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 45 (1990)
Heft: 3

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

elements. Taking now into account that $t(\chi) := |A(\chi)|/|Z(G)|$, it results that $|Z(G)| \geqq s(\chi)$. But this contradicts the hypothesis and we are done.

Corollary. *Let G be a finite group with $1 < Z(G) < G$ and $\Phi(G) = 1$. Let*

$$c := \max\{|C_G(x)|/x \in G \setminus Z(G)\} \quad \textit{and} \quad b(G) := \max\{\chi(1)/\chi \in \mathrm{Irr}(G)\}.$$

Then $b(G) \geq \left(\dfrac{c}{c - |Z(G)|}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Proof: As a direct consequence of the Theorem, we obtain that $c|A(\chi)| \geq |Z(G)||G|$ for every nonlinear $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. On the other hand, it's a simple exercise to prove that $|A(\chi)| < |G| \dfrac{\chi(1)^2 - 1}{\chi(1)^2}$. Since $\dfrac{(b(G))^2 - 1}{(b(G))^2} \geq \dfrac{\chi(1)^2 - 1}{\chi(1)^2}$ for every $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, the result follows by combining these inequalities.

We have already seen that if $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ is nonlinear, then $|Z(G)| \mid |A(\chi)|$. This result may be refined in certain very special cases. For example, suppose that G is a finite group and $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ is faithful such that $\chi(1) = 2$ and $\chi(g) \in \mathbb{Q}$ for every $g \in G$. It is a matter of simple calculations to show that $|A(\chi)| = 3|Z(G)|$. If, moreover, $Z(G) = 1$, then $|A(\chi)| = 3$ and G has a maximal subgroup of index 3 (the centralizer of an element of $A(\chi)$).

Marian Deaconescu, Department of Mathematics,
University of Timisoara, Romania

REFERENCES

1 Gaschütz W.: Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen. Math. Z. *58*, 160–170 (1953).
2 Isaacs I. M.: Character theory of finite groups. Academic Press, New York (1976).

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/90/030080-02$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 1009. n Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ mit $x_i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ $(k \geq 2)$ werden einmal linear, ein andermal kreisförmig so angeordnet, dass die Summe zweier Nachbarglieder stets von $k + 1$ verschieden ist. Für beide Fälle bestimme man die Anzahl der zulässigen Anordnungen.

J. Binz, Bolligen

Lösung des Aufgabenstellers (Bearbeitung der Redaktion).

s_n bzw. t_n bezeichnen die Anzahlen der zulässigen linearen bzw. kreisförmigen Anordnungen.

a) Es gilt $s_n = a_n + b_n$, wobei a_n die Anzahl der auf 0 endenden, b_n diejenige der übrigen zulässigen linearen Anordnungen bedeuten. Dann ist

$$a_{n+1} = a_n + b_n, \quad b_{n+1} = k a_n + (k-1) b_n, \quad a_2 = k + 1, \quad b_2 = k^2,$$

woraus man für s_n die Rekursion

$$s_{n+1} = k s_n + s_{n-1} \tag{1}$$

und die Anfangswerte $s_2 = k^2 + k + 1$, $s_3 = k^3 + k^2 + 2k + 1$ erhält. Ergänzt man – mit (1) verträglich – durch

$$s_0 = 1, s_1 = k + 1 \tag{2}$$

und führt zur Lösung von (1), (2) die formale Potenzreihe $s = \sum_{m \geq 0} s_m x^m$ ein, so erhält man in geläufiger Weise

$$s = (1 + x)(1 - x(k + x))^{-1} = (1 + x) \sum_{m \geq 0} x^m (k + x)^m.$$

s_n ist darin der Koeffizient von x^n, somit ergibt sich

$$s_n = \sum_{j \geq 0} \left\{ \binom{n-j}{j} k^{n-2j} + \binom{n-j-1}{j} k^{n-2j-1} \right\}.$$

b) Von den s_n zulässigen linearen Anordnungen beginnen h_n mit 1 und enden auf k, ebensoviele beginnen mit k und enden auf 1. Da x_1 und x_n jetzt benachbart sind, müssen diese Folgen ausgeschlossen werden. Somit ist $t_n = s_n - 2h_n$, und es genügt, h_n zu bestimmen.

Bedeuten $c(n, i)$ die Anzahlen der zulässigen linearen Folgen, welche mit 1 beginnen und auf i enden ($i = 0, \ldots, k$), so ist $h_n = c(n, k)$. Für $n \geq 2$ gewinnt man

$$c(n + 1, 0) = \sum_{i=0}^{k} c(n, i) \tag{3}$$

und

$$c(n + 1, i) = c(n + 1, 0) - c(n, k + 1 - i), \quad i = 1, \ldots, k. \tag{4}$$

Aus (3), (4) leitet man die Relationen

$$c(i, 1) - c(i, k) = 1 \quad \text{für} \quad i = 2, \ldots, n + 1$$

$$c(n, k) = c(n + 1, 0) - c(n + 1, 1)$$

$$c(n + 1, i) - c(n + 1, 1) = c(n, k) - c(n, k + 1 - i) = c(n - 1, i) - c(n - 1, 1)$$

$$= \begin{cases} c(2, i) - c(2, 1) = 0 & (n + 1 \text{ gerade}) \\ c(2, k) - c(2, k + 1 - i) = -1 & (n + 1 \text{ ungerade}), \quad 2 \leq i \leq k - 1 \end{cases}$$

her. Mit Hilfe dieser Relationen findet man

$$h_{n+1} = k \cdot c(n, k) + c(n, k - 1) + k - 1 + \begin{cases} 2 - k & (n \text{ ungerade}) \\ 0 & (n \text{ gerade}) \end{cases}$$

$$= k h_n + h_{n-1} + k - 1 + (k - 2)(-1 + (-1)^n)/2.$$

Für $g_n = 2h_n$ gilt dann

$$g_{n+1} = k g_n + g_{n-1} + k + (-1)^n (k-2), \tag{5}$$

$$g_1 = g_2 = 0. \tag{6}$$

Die Lösung von (5), (6) mittels der formalen Potenzreihe $g = \sum_{m \geq 1} g_m x^m$ ergibt nach einiger Rechnung

$$g_n = \frac{1}{k}\left\{2(k^2-k+1)\sum_{j\geq 0}\binom{n-3-j}{j}k^{n-3-2j} + 2(k-1)\sum_{j\geq 0}\binom{n-4-j}{j}k^{n-4-2j} + (-1)^{n-1}(k-2) - k\right\}$$

Schliesslich ist $t_n = s_n - g_n$.

Weitere Lösungen sandten O. P. Lossers (Eindhoven, NL), K. Schütte (München, BRD).

Aufgabe 1010. Es sei

$$F(z) := \prod_{h=1}^{\infty}(1 + z^{10h}), \quad |z| < 1.$$

Mit $\varepsilon := \exp(2\pi i/99)$ werde gesetzt

$$G(z) := (1/99)\sum_{j=0}^{98} F(\varepsilon^j z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k, \quad |z| < 1.$$

Man zeige, dass $g_k \neq 0$ für unendlich viele k und ermittle das kleinste $k > 0$ mit $g_k \neq 0$.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Lösung mit Verallgemeinerung. Es sei

$$F(z) = \prod_{h=1}^{\infty}(1 + z^{a^h}); \quad a \in \mathbb{N}\backslash\{1\}.$$

Mit $\varepsilon = \exp(2\pi i/(a^2-1))$ werde gesetzt

$$G(z) = (1/(a^2-1))\sum_{j=0}^{a^2-2} F(\varepsilon^j z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k.$$

Wir zeigen, dass $g_k \neq 0$ für unendlich viele k und ermitteln das kleinste positive k mit $g_k \neq 0$. Vorab bemerken wir noch, dass man F und G als formale Potenzreihen auffassen kann; die Bedingung $|z| < 1$ ist für die Lösung ohne Bedeutung.

Wir notieren $F(z)$ additiv:

$$F(z) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} z^{k_j} \quad \text{mit}$$

$$k_j = \begin{cases} a^{m+1} & \text{für} \quad j = 2^m \\ a^{m+1} + k_r & \text{für} \quad j = 2^m + r \end{cases} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots; 1 \leq r < 2^m)$$

Im Zahlsystem zur Basis a bestehen die k_j nur aus Ziffern 0 und 1.
Ferner wird

$$g_k = \frac{1}{a^2 - 1} \sum_{s=0}^{a^2-2} \varepsilon^{sk} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad k \not\equiv 0 \pmod{a^2 - 1} \\ 1 & \text{für} \quad k \equiv 0 \pmod{a^2 - 1}. \end{cases}$$

Für $j = 2^{2(a-1)t} - 1$ $(t = 1, 2, 3, \ldots)$ wird $k_j = \sum_{s=1}^{2(a-1)t} a^s$, eine Zahl, die aus $2(a-1)t$ Ziffern 1 und der Endziffer 0 besteht. Ihre «Zweierblockquersumme» beträgt

$$d(k_j) = a + (a+1)(at - t - 1) + 1 = t(a^2 - 1).$$

Für alle solchen k_j gilt $k_j \equiv d(k_j) \equiv 0 \pmod{a^2 - 1}$ und somit $g_k = 1$. Jedes $k \equiv 0$ muss $d(k) \equiv 0 \pmod{a^2 - 1}$ erfüllen; das kleinste $k > 1$ muss also möglichst wenig Ziffern enthalten und $d(k) = a^2 - 1$ erfüllen. Es lautet somit $k = \sum_{s-1}^{2(a-1)} a^s$.
In der Originalaufgabe ist $a = 10$ und somit das kleinste positive k

$$k = 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0.$$

J. Binz, Bolligen

H.-J. Seiffert (Berlin) bemerkt, dass Aufgabe 1010 identisch ist mit Problem 728, Nieuw Arch. Wiskd., IV Ser., 4/1986, p. 269–270, gestellt von K. Mahler, Lösung von A. A. Jagers. Weitere Lösungen sandten W. Janous (Innsbruck, A), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), J.-Y. Thibon (Enghien, F).

Aufgabe 1011. Die Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei folgendermassen rekursiv definiert:

$$f(1) = 1, \quad f(2n) = f(n) + g(n-1), \quad f(2n+1) = f(n+1) + g(n/2)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $g(x)$ die kleinste Zweierpotenz $> x$ bezeichnet. Man zeige, dass f involutorisch ist, d. h. dass $f(f(n)) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

K. Schütte, München, BRD

Lösung (mit Präzisierung). Für die Intervalle

$$I_p := \{n \mid n \in \mathbb{N}, 2^p + 1 \leq n \leq 2^{p+1}\} \quad p = 0, 1, 2, \ldots$$

lässt sich auf Grund der rekursiven Definition der Funktion f für $p \geq 1$ die Beziehung

$$f(n) = \begin{cases} f\left(\dfrac{n+1}{2}\right) + 2^{p-1} & \text{falls} \quad n \in I_p,\ n \text{ ungerade} \\ f\left(\dfrac{n}{2}\right) + 2^p & \text{falls} \quad n \in I_p,\ n \text{ gerade} \end{cases} \tag{1}$$

gewinnen, sodass durch vollständige Induktion mit den Verankerungen $f(3) = f(2) + 2^0 = 2 + 1 = 3$ und $f(4) = f(2) + 2^1 = 2 + 2 = 4$ folgt, dass f eine Permutation auf dem Intervall I_p ist, wobei seine ungeraden Zahlen genau in die erste Hälfte und die geraden Zahlen in die zweite Hälfte von I_p abgebildet werden.
Ebenso lassen sich induktiv mit den Verankerungen $f(3) = 2f(2) - 1$ und $f(4) = 2f(2)$ mittels den gegebenen Eigenschaften von f für $n \in I_p$ die Beziehungen

$$f(n) = \begin{cases} 2 \cdot f(n - 2^{p-1}) - 1 & \text{falls} \quad 2^p + 1 \leq n \leq 2^p + 2^{p-1} \\ 2 \cdot f(n - 2^p) & \text{falls} \quad 2^p + 2^{p-1} + 1 \leq n \leq 2^{p+1} \end{cases} \tag{2}$$

herleiten, die zeigen, wie die Bilder des Intervalles I_p durch diejenigen von I_{p-1} dargestellt werden: Die Bilder der ersten Hälfte von I_p sind also ungeradzahlig, die der zweiten Hälfte geradzahlig.
Aus (1), (2) folgt nun wieder induktiv unter Anwendung der gegebenen Definitionen von f für $2^p + 1 \leq n \leq 2^p + 2^{p-1}$ (1. Hälfte von I_p)

$$\begin{aligned} f(f(n)) &= f(2f(n - 2^{p-1}) - 1) \\ &= f(f(n - 2^{p-1})) + g(f(n - 2^{p-1}) - \tfrac{1}{2}) = n - 2^{p-1} + 2^{p-1} = n \end{aligned}$$

und für $2^p + 2^{p-1} + 1 \leq n \leq 2^{p+1}$ (2. Hälfte von I_p)

$$f(f(n)) = f(2f(n - 2^p)) = f(f(n - 2^p)) + g(f(n - 2^p) - 1) = n - 2^p + 2^p = n.$$

Damit ist bewiesen, dass f *sogar auf jedem Intervall* I_p eine involutorische Permutation darstellt.

R. Wyss, Flumenthal

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), Kee-wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), H. Widmer (Rieden).

Aufgabe 1012. Für $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ sei

$$I_n := \int_0^\infty (1 + x^n)^{-1/2}\, dx.$$

Man gebe mindestens ein Zahlenpaar (r, s) mit $r \neq s$ an, derart, dass das Verhältnis I_r/I_s rational ist.

M. Vowe, Therwil

Lösung: Mit der Substitution $x = (t/(1-t))^{1/n}$ $(0 \leq t < 1)$ erhält man

$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{-(n-1)/n}(1-t)^{-(n+2)/(2n)}\,dt. \tag{1}$$

Bezeichnen $B(x, y)$ die Betafunktion und $\Gamma(x)$ die Gammafunktion, so erhält man wegen

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

aus (1) für jedes Zahlenpaar (r, s) mit $r, s > 2$,

$$I_r/I_s = (s/r)\frac{\Gamma(1/r)\Gamma((r-2)/(2r))}{\Gamma(1/s)\Gamma((s-2)/(2s))}. \tag{2}$$

(2) zeigt, dass $I_r/I_s = s/r$, falls das Zahlenpaar (r, s) die Gleichung $s = 2r/(r-2)$ erfüllt. Ein mögliches Zahlenpaar im Sinne der Aufgabenstellung ist somit $(r, s) = (3, 6)$.

H.-J. Seiffert, Berlin

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), F. Götze (Jena, DDR), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL; 2 Lösungen), P. Sakmann (Bern), K. Schütte (München, BRD).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Dezember 1990* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68), Problem 872 A (Band 36, S. 175), Aufgabe 880 (Band 37, S. 93).

Aufgabe 1031. Bezüglich einer reellen Zahl r seien die Polynome f_n $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ folgendermassen rekursiv definiert:

$$f_0 = 1, \quad f_1(x) = x - r, \quad f_{n+1}(x) = x \cdot f_n(x) - f_{n-1}(x) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Man zeige, dass diese Polynome nur reelle Nullstellen haben, und bestimme in Abhängigkeit von r das Infimum und das Supremum der Menge aller Nullstellen dieser Polynome.

K. Schütte, München, BRD

Aufgabe 1032. Man beweise: Wenn mit $L_r(x, y)$ die Mittelwertfamilie

$$L_r(x, y) = \left[\frac{x^r - y^r}{r \ln(x/y)}\right]^{1/r}, \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \; x > 0, y > 0,$$

bezeichnet wird, dann gilt für alle $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und für alle positiven reellen Zahlen x und y mit $x \neq y$:

$$\sqrt{xy} < \tfrac{1}{2}(L_r(x, y) + L_{-r}(x, y)) < \frac{x + y}{2}.$$

H. Alzer, Johannesburg, Südafrika

Aufgabe 1033. Die Nullstellen des Polynoms

$$f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0; \quad n \geq 2, \text{ alle } a_i \in \mathbb{R}$$

seien sämtlich reell. Man zeige, dass

$$2 a_{n-2} \leq a_{n-1} (a_{n-1} + |a_0|^{1/n}).$$

Wann genau gilt Gleichheit?

W. Janous, Innsbruck, A

Literaturüberschau

P. Erdös: Studies in Pure Mathematics. To the Memory of Paul Turań. 773 Seiten, Fr. 86.–. Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart 1983.

Paul Turań hat Kombinatorik, Zahlentheorie usw. durch neuartige Fragestellungen und Beweismethoden bereichert. Dazu sei je ein Beispiel gegeben. (1) Die «extremale Graphentheorie». entstanden aus der folgenden Frage: Wie viele Kanten können zwischen n Punkten maximal gezogen werden, ohne dass ein Dreieck (allgemein: ein vollständiger k-Graph) entsteht? (2) Der Beweis des Satzes von Hardy-Ramanujan (Fast alle natürlichen Zahlen n werden von ungefähr $\log \log n$ Primzahlen geteilt.). Turańs Interessen spiegeln sich in den über 60 Arbeiten dieses Sammelbandes. Für die meisten Leser der Elemente dürfte er (wie für den Referenten) besonders durch die Hinweise auf ältere Resultate wertvoll sein, an welche diese Arbeiten anknüpfen. Auch hier ein Beispiel: Eine reellwertige monotone Funktion, definiert auf den positiven natürlichen Zahlen und additiv für teilerfremde m, n (d. h. $f(m \cdot n) = f(m) + f(n)$, falls $(m, n) = 1$), ist ein konstantes Vielfaches der Logarithmusfunktion (P. Erdös).

E. Specker

M. Eichler und D. Zagier: The Theory of Jacobi Forms. Progress in Mathematics, Vol. 55. 148 Seiten, Fr. 44.–. Birkhäuser, Boston, Basel 1985.

Il existe une riche littérature d'une part sur les fonctions analytiques doublement périodiques dans le plan complexe, d'autre part sur les fonctions et formes automorphes par rapport à un groupe discret de transformations linéaires du demi-plan supérieur, en particulier sur les formes modulaires. Les auteurs du présent ouvrage proposant un traitement systématique d'une classe de fonctions analytiques de deux variables complexes, ayant un comportement proche de celui d'une fonction doublement périodique par rapport à la première variable, et proche de celui d'une forme automorphe par rapport a la seconde variable. Ces fonctions portent le nom de Jacobi qui en a le premier rencontré un exemple particulier, en étudiant des séries théta. On retrouve des constructions et résultats familiers de la théorie des formes modulaires comme les séries d'Eisenstein, les opérateurs de Hecke, les «new forms» et «old forms», le produit scalaire de Petersson, etc. Plusieurs techniques pemettent d'établir des