

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 45 (1990)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Funktionen beschränkter Homogenität  
**Autor:** Magyari, Eugen  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-42414>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Then for  $m \geq 1$  we have

$$s^2 \geq (m + 2) r [2m(7m - 2) R^2 - (m^2 + 19m + 2) R r + 4r^2] / m [m(m + 1) R - 4r]. \tag{17'}$$

The same inequality (17') is obtained for  $0 \leq m \leq 1$  and  $R > 4r/m(m + 1)$ . In the case, when  $0 \leq m \leq 1$  and  $2r \leq R < 4r/m(m + 1)$ , we obtain

$$s^2 \leq (m + 2) r [2m(7m - 2) R^2 - (m^2 + 19m + 2) R r + 4r^2] / m [m(m + 1) R - 4r]. \tag{17''}$$

Finally, we note that the inequality (10) gives the best presently known rational lower bound for  $s^2$ , because of the following chain of well-known inequalities

$$\begin{aligned} s^2 &\geq 4r(12R^2 - 11Rr + r^2)/(3R - 2r) \geq r(16R - 5r) \geq r(4R + r)^2/(R + r) \\ &\geq r(16R + 3r)(4R + r)^2/(4R - r)(4R + 7r) \geq r(4R + r)^3/(2R - r)(2R + 5r) \\ &\geq 3r(4R + r) \geq r(4R + r)^2/(2R - r) \geq 3r(4R + r)^3/(7R - 5r)^2. \end{aligned} \tag{18}$$

Svetoslav Jordanov Bilchev,  
Emilia Angelova Velikova, Russe, Bulgaria

REFERENCES

- [1] Bottema O., Djordjević R. Z., Janić R. R., Mitrinović D. S., Vasić P. M.: Geometric inequalities, Wolters-Noordhoff, Groningen, The Netherlands (1969).
- [2] Bilchev S. J., Velikova E. A.: Priloženie na njakoi preobrazuvanija za poluchavane na novi geometrichni neravenstva, Nauchni trudove na VTU. "A. Kanchev"-Russe, XXVIII, Ser. 11, pp. 21–26 (1986).

## Funktionen beschränkter Homogenität

Wir führen in dieser Arbeit eine neue Funktioneneigenschaft ein, die zur Unterscheidung vom gewöhnlichen Homogenitätsbegriff (Gl. 1–3) als «beschränkte Homogenität» (Gl. 5–6) bezeichnet wird. Anschliessend veranschaulichen wir diese spezielle Skaleneigenschaft durch mehrere praktische Beispiele (Gl. 8–23).

Wir betrachten hier stetig differenzierbare Funktionen  $f: R^m \rightarrow R$  wobei  $R^m = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_k \in R\}$ . Einfachheitshalber schreiben wir aber fast alle Gleichungen nur für  $m = 2$  oder  $m = 1$  auf, weil die Verallgemeinerung für beliebiges  $m$  offensichtlich ist.

Nach der gewöhnlichen Definition ist  $f = f(X)$  eine homogene Funktion vom Homogenitätsgrad  $s$ , wenn

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^s f(x_1, x_2) \tag{1}$$

für beliebiges  $\lambda \in R^+$  erfüllt ist.

Solche Funktionen genügen der wohlbekanntenen Eulerschen Identität:

$$Ef(X) = sf(X) \quad (2)$$

wobei der lineare Operator

$$E = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + x_m \frac{\partial}{\partial x_m} \quad (3)$$

als «Eulersche-Operator» bezeichnet wird.

Wenn  $h = h(X)$  ebenfalls eine, im Sinne der Definition (1) homogene Funktion ist und denselben Homogenitätsgrad  $s$  wie die Funktion  $f = f(X)$  besitzt, so gilt, als Folge von (2),  $E(f(X)/h(X)) = 0$ . Die Eulersche Identität (2) kann also in trivialer Weise wie folgt umgeschrieben werden

$$Ef(X) = sf(X) + g(X)E(f(X)/h(X)) \quad (4)$$

ohne, dass dadurch ihr Inhalt beeinträchtigt wird. ( $g = g(X)$  stellt hier eine beliebige Funktion  $g: R^m \rightarrow R$  dar).

Die Funktionen von «beschränkter Homogenität»  $\Phi: R^m \rightarrow R$ , die wir in der vorliegenden Arbeit präsentieren, zeichnen sich, im Vergleich mit den gewöhnlichen homogenen Funktionen, durch die spezielle Eigenschaft aus, dass sie die Gleichung

$$\Phi(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^s \Phi(x_1, x_2) \quad (5)$$

nicht für beliebige  $\lambda \in R^+$ , sondern nur für eine abzählbare Untermenge  $\{\lambda_n\}$  von  $R^+$ :

$$\{\lambda_n\} =: A \subset R^+. \quad (6)$$

erfüllen.

Zum Unterschied gehört auch die Tatsache, dass diese «beschränkt-homogene» Funktionen  $\Phi$  die Eulersche Identität in ihrer gewöhnlichen Form (2) nicht erfüllen. Sie genügen der Eulerschen Identität lediglich in ihrer «ergänzten» Form (4), dies aber auch noch dann, wenn  $g$  durch  $h$  ersetzt wird, d. h.:

$$E\Phi(X) = s\Phi(X) + h(X)E(\Phi(X)/h(X)), \quad (7)$$

wobei  $h$  eine beliebig (stetig differenzierbare) Funktion vom Homogenitätsgrad  $s$  ist. Wohlgermerkt ist aber die Beziehung (7) keine typische Identität für die beschränkt-homogenen Funktionen; sie ist für jede  $\Phi$  erfüllt, falls  $h$  der Identität  $Eh(X) = sh(X)$  genügt.

Erstes Beispiel.

Es sei

$$\Phi(x_1, x_2) := z(\xi_1, \xi_2), \quad \xi_i = \ln x_i \quad (8)$$

eine in den Logarithmen  $\xi_1$  und  $\xi_2$  der unabhängigen Variablen  $x_1$  und  $x_2$  periodische Funktion mit derselben Periode  $T$ , d. h.  $z(\xi_1 + T, \xi_2 + T) = z(\xi_1, \xi_2)$ . So gilt  $\Phi(\lambda x_1, \lambda x_2) = z(\xi_1 + \ln \lambda, \xi_2 + \ln \lambda) = z(\xi_1, \xi_2) = \Phi(x_1, x_2)$  falls  $\ln \lambda = nT$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Mit anderen Worten definiert die Gl. (8) (mit  $x_k \in \mathbb{R}^+$ ) eine beschränkt homogene Funktion vom Homogenitätsgrad  $s = 0$ , die die Gleichung (5) nur für

$$\lambda = \lambda_n = e^{nT}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{9}$$

erfüllt. Ein konkretes Beispiel dieser Art ist  $\Phi(x_1, x_2) = \sin(\ln x_1) + \cos(\ln x_2)$  wobei sich  $\lambda_n = \exp(2\pi n)$  ergibt. Es ist leicht nachzuprüfen, dass diese Funktion die Eulersche Identität in ihrer gewöhnlichen Form (2) nicht, wohl aber in ihrer «ergänzten» Form (7) (mit einer beliebigen homogenen Funktion  $h = h(x_1, x_2)$  vom Homogenitätsgrad  $s = 0$ ) erfüllt.

**Zweites Beispiel.**

Es leuchtet sofort ein, dass die in (8) definierte  $z$ -Funktion multipliziert mit einer beliebigen Funktion  $H = H(X)$ , die homogen im gewöhnlichen Sinne ist und den Homogenitätsgrad  $s$  besitzt, d. h.

$$\Phi(x_1, x_2) := H(x_1, x_2) z(\xi_1, \xi_2) \tag{10}$$

eine im Sinne (5–6) «beschränkt homogene» Funktion vom Homogenitätsgrad  $s$  ergibt.

**Drittes Beispiel.**

Wir betrachten nun den Fall der uns eigentlich zum Nachdenken über die «beschränkte Homogenität» veranlasst hat.

Wir gehen von der berühmten Emden-Fowler Gleichung [1, 2]:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^{-p} y^{2p-3} = 0 \tag{11}$$

aus, wobei  $p$  eine rationale Zahl ist,  $p \geq 2$  und  $x \geq 0$ .

Durch die Substitution

$$\begin{aligned} y(x) &= x^{1/2} z(\xi) \\ \xi &= \frac{1}{2} \ln x \end{aligned} \tag{12}$$

geht die Gl. (11) in die Gleichung

$$z'' = z - 4 z^{2p-3}, \tag{13}$$

mit konstanten Koeffizienten über, wo der Strich die Ableitung  $d/d\xi$  bezeichnet. Für unseren Zweck ist es ausreichend, die Lösung von Gl. (13) nur qualitativ zu diskutieren. Dies kann «anschaulich» durchgeführt werden, indem man erkennt, dass (13) mit der

## Newtonschen Bewegungsgleichung eines Teilchens der Masse 1 im Potential

$$V(z) = -\frac{1}{2}z^2 + \frac{2}{p-1}z^{2(p-1)}. \quad (14)$$

identisch ist.

Damit stellt das «Energieintegral»

$$\frac{1}{2}z'^2 + V(z) = \mathcal{E} \quad (15)$$

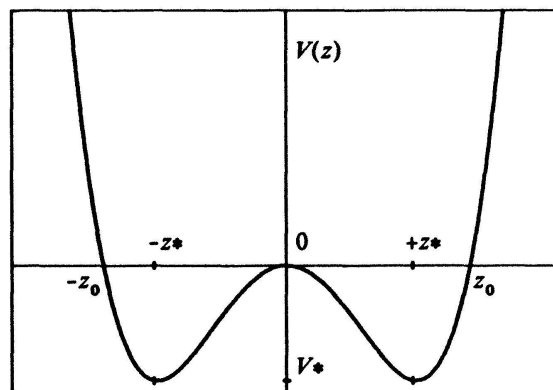
ein erstes Integral der Gl. (13) dar, wobei die «Gesamtenergie»  $\mathcal{E}$  durch die Anfangsbedingungen bestimmt ist.

Wir betrachten hier nur die Fälle  $p = 2, 3, 4, \dots$ .

Für  $p = 3, 4, 5, \dots$  beschreibt die Formel (14) das «Doppelpotential» der Fig. 1 wobei

$$z_0 = \left(\frac{q+2}{8}\right)^{1/q}, \quad z_* = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/q} \quad \text{und} \quad V_* = -\frac{q}{2(q+2)}\left(\frac{1}{4}\right)^{2/q}$$

und  $q = 2p - 4 = 2, 4, 6, \dots$



Figur 1. Qualitativer Verlauf des Potentials (14) für  $p = 3, 4, 5$ .

Es ist sofort ersichtlich, dass für  $V_* < \mathcal{E} < 0$  Gl. (13) zwei Lösungsfamilien von periodischen (oszillierenden) Funktionen hat, die für  $\mathcal{E} > 0$  in eine Lösungsfamilie von periodischen Funktionen übergehen. Die Schwingungsperiode ist gegeben durch

$$T = 2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{2(\mathcal{E} - V)}} \quad (16)$$

wobei  $z_{1,2}$  die Koordinaten der «Umkehrpunkte», d. h. die Lösungen der Gleichung  $V(z) = \mathcal{E}$  sind. Folglich sind die  $z$ -Lösungen im erwähnten Wertintervall von  $\mathcal{E}$  periodische Funktionen von  $\xi$ , d. h.  $z(\xi + T) = z(\xi)$  und damit, aufgrund von (12), haben wir

$$y(\lambda x) = \lambda^{1/2} x^{1/2} z\left(\frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln \lambda\right) = \lambda^{1/2} y(x) \quad (17)$$

falls

$$\lambda \in \{\lambda_n | \lambda_n = e^{2nT}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \tag{18}$$

Für die Werte  $\lambda = \lambda_n$  gegeben durch (18) sind also die Lösungen  $y = y(x)$  der Emden-Fowler Gleichung (11) beschränkt-homogene Funktionen vom Homogenitätsgrad  $s = 1/2$ , im Sinne der Definition (5–6).

Der Fall  $p = 2$  ist explizit lösbar und dadurch sehr anschaulich. Einfache Berechnungen ergeben die Lösung

$$y(x) = \left(\frac{2}{3} e^x x\right)^{1/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \text{const.}\right) \tag{19}$$

deren  $\xi$ -Periode ist  $T = 2\pi/\sqrt{3}$  und damit

$$\lambda_n = \exp\left(\frac{4\pi n}{\sqrt{3}}\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{20}$$

Es ist ebenfalls nachzuprüfen, dass (19) die gewöhnliche Eulersche Identität (2) nicht erfüllt wohl aber ihre «ergänzte» Form (7).

Wir schliessen diese Arbeit mit einem vierten Beispiel einer Funktion von beschränkter Homogenität ab.

Diese Funktion stellt die allgemeine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung

$$y' = -x^{-q} y^2 + \frac{q-1}{x} y - x^{q-2}. \tag{21}$$

dar und hat die Form (siehe Ref. 1, S. 326):

$$y(x) = x^{q-1} \tan(\text{const.} - \ln x) \tag{22}$$

Man sieht sofort, dass  $y(\lambda x) = \lambda^{q-1} y(x)$  falls

$$\lambda \in \{\lambda_n | \lambda_n = e^{n\pi}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \tag{23}$$

d. h., dass die in (22) gegebene Funktion  $y(x)$  tatsächlich eine beschränkt-homogene Funktion vom Homogenitätsgrad  $s = q - 1$  ist.

Wir können also festhalten, dass die stetig differenzierbaren Funktionen, die an der logarithmischen Skala periodisch sind, Funktionen darstellen bzw. zu Funktionen führen, die an der «algebraischen» Skala im «beschränkten» Sinne (5–6) homogen sind. Wir haben bisher keine weiteren Funktionentypen gefunden, die die Eigenschaft der «beschränkten Homogenität» aufgewiesen hätten, ohne mit dieser Klasse der «logarithmisch-periodischen» Funktionen in Verbindung zu stehen.

Der Verfasser ist Prof. Catherine Bandle vom Mathematischen Institut der Universität Basel für ihre Anregungen dankbar.

Eugen Magyari, Technisches Forschungszentrum, HILTI AG,  
Schaan, (Fürstentum Liechtenstein)

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 Kamke E.: Differentialgleichungen, Bd. 1, Teubner, Stuttgart 1977, p. 560.
- 2 Wong J. S. W.: On the generalized Emden-Fowler Equation, SIAM Review 17 (2), 339–360 (1975).

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/90/030075-06\$1.50 + 0.20/0

## Kleine Mitteilung

## Zeros of characters and the Frattini subgroup

Let  $G$  be a finite group and let  $\text{Irr}(G)$  be the set of its (complex) irreducible characters. Of course, the Frattini subgroup  $\Phi(G)$  being normal in  $G$ , it must be an intersection of certain kernels of elements of  $\text{Irr}(G)$ . However, it seems that the problem of describing  $\Phi(G)$  in terms of characters is still open. The aim of this short Note is to give a sufficient condition for the nontriviality of  $\Phi(G)$  in terms of vanishing sets of nonlinear irreducible characters of  $G$ .

Our notation is standard and follows that of [2]. Throughout,  $G$  will be a finite group and  $Z(G)$ ,  $G'$  will denote its centre and its derived subgroup, respectively. If  $\chi \in \text{Irr}(G)$  is nonlinear, the vanishing set  $A(\chi)$  of  $\chi$  is defined by  $A(\chi) := \{g \in G / \chi(g) = 0\}$ . A well-known result of Burnside asserts that  $A(\chi) \neq \Phi$ ; moreover, it's clear that  $A(\chi)$  is a union of conjugate classes of elements of  $G$ .

We prove the following

**Theorem.** *Let  $G$  be a finite group with  $1 < Z(G) < G$ . Suppose that there exists a nonlinear  $\chi \in \text{Irr}(G)$  such that  $A(\chi)$  contains fewer than  $|Z(G)|$  conjugate classes of elements. Then  $\Phi(G) \neq 1$ .*

**Proof:** The key observation is that actually  $A(\chi)$  is a union of cosets modulo  $Z(G)$ . To prove this, note that by Problem 3.12 of [2] it follows that for every  $g \in G$ ,

$$|\chi(g)|^2 = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{h \in G} \chi([g, h]). \quad (*)$$

Let now  $g, h \in G$  and  $z \in Z(G)$ ; since  $[g, h] = [gz, h]$ , it follows from (\*) that  $g \in A(\chi)$  iff  $gz \in A(\chi)$  for every  $z \in Z(G)$ . This means that  $A(\chi)$  is a union of cosets modulo  $Z(G)$ .

Suppose, by way of contradiction, that  $\Phi(G) = 1$ . By a well-known result of [1],  $G' \cap Z(G) \leq \Phi(G)$ , so  $G' \cap Z(G) = 1$ .

Denote by  $s(\chi)$  and  $t(\chi)$  the number of conjugate classes of  $G$  contained in  $A(\chi)$  and the number of cosets modulo  $Z(G)$  lying in  $A(\chi)$ , respectively. We shall reach a contradiction by applying the pigeonhole principle. Suppose that  $g, h \in A(\chi)$ ,  $g \neq h$  and there exist  $u \in G$  and  $z \in Z(G)$  such that  $g = h^u = hz$ . Then  $z = h^{-1}g = h^{-1}h^u = [h, u] \in G' \cap Z(G)$ , whence  $g = h$ . This contradicts the choice of  $g$  and  $h$  and shows that  $A(\chi)$  contains at most  $s(\chi)t(\chi)$