Charakterisierungen von nirgends differenzierbaren Weierstraß-Funktionen durch Replikativität

Autor(en): **Kairies, H.-H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **45 (1990)**

Heft 3

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-42412

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Vol. 45 Nr. 3 Seiten 61–88 Basel, April 1990

Charakterisierungen von nirgends differenzierbaren Weierstraß-Funktionen durch Replikativität

1. Einleitung

Die Weierstraß-Funktionen $S_{a,b}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $C_{a,b}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind für $0 < b < 1$ und $a > 0$ definiert durch

$$S_{a,b}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \sin 2\pi a^n x, \quad C_{a,b}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos 2\pi a^n x.$$

Es ist klar, dass sie stetig auf $\mathbb{R}$ sind.
Weierstraß ([9], p. 71–74) hat gezeigt, dass $C_{a,b}$ nirgends differenzierbar ist, wenn $a \in \mathbb{N}$ ungerade und $a b > 1 + \frac{3\pi}{2}$ gilt. Der Weierstraßsche Beweis ist auch in der Arbeit [1] von du Bois-Reymond wiedergegeben, vgl. dazu Bemerkungen von Weierstraß selbst ([9], p. 223 und p. 228).
Im Fall $a \in \mathbb{N}$ sind die Funktionen $S_{a,b}$ und $C_{a,b}$ mit ihren Fourierreihen identisch, und aus allgemeinen Sätzen von Freud [2] oder Kahane [4] über lakunäre Fourierreihen folgt leicht, dass dann $S_{a,b}$ und $C_{a,b}$ nirgends differenzierbar sind, falls $a b \geqq 1$ gilt. Hardy [3] beweist, dass $S_{a,b}$ und $C_{a,b}$ nirgends differenzierbar sind, falls $a b \geqq 1$ ist, auch wenn a nicht ganz ist. Seine Arbeit enthält weitere Informationen zu diesem Thema, auch historischer Art.
Wir wollen in dieser Note Charakterisierungen von Weierstraß-Funktionen durch Funktionalgleichungen behandeln. Wir beschränken uns auf die Diskussion von

$$S_a(x) := S_{a,\frac{1}{a}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n} \sin(2\pi a^n x),$$

sind also in dem Grenzfall $a b = 1$. Die Übertragung der Resultate auf die Kosinusreihen C_a ist evident.
Als einführendes Beispiel geben wir eine wohlbekannte einfache Charakterisierung von S_a mit Hilfe einer Iterationsfunktionalgleichung:

Satz 1. *Für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $|f(x)| \leqq M$, falls $|x| \geqq r$, und es gelte*

$$f(x) = \frac{1}{a} f(a x) + \sin 2\pi x, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

für ein $a > 1$. Dann ist $f = S_a$.

Beweis. Iteration von (1) liefert für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \frac{1}{a^k} f(a^k x) + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{a^n} \sin 2\pi a^n x.$$

Da $f(a^k x)$ beschränkt für $k \to \infty$, folgt

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{a^n} \sin 2\pi a^n x = S_a(x).$$

In Kuczma's Buch ([5], p. 81–82) findet man Informationen zu der allgemeinen Gleichung $f(x) = b f(a x) + F(x)$ und Literaturangaben dazu.
Satz 1 bleibt richtig, wenn nur die aus (1) folgende Beziehung

$$f(x) - \frac{1}{a^N} f(a^N x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{a^n} \sin 2\pi a^n x, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

für ein festes $N \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt wird. Iteration liefert dann für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \frac{1}{a^{Nk}} f(a^{Nk} x) + \sum_{n=0}^{Nk-1} \frac{1}{a^n} \sin 2\pi a^n x, \quad \text{also } (k \to \infty)\, f = S_a.$$

Im Gegensatz zu (1) erkennt man in der Version (2) sofort den engen Zusammenhang des inhomogenen Terms $\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{a^n} \sin 2\pi a^n x$ mit der zu charakterisierenden Funktion S_a.
Wir wollen im folgenden S_a durch Replikativitätsfunktionalgleichungen charakterisieren. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heisst replikativ vom Typ (u_k, v_k), wenn es komplexe Folgen (u_k) und (v_k) gibt, so dass

$$\frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} f\left(\frac{x+m}{k}\right) = u_k f(x) + v_k \tag{3}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Grundlegendes über stetige replikative Funktionen ist in der Arbeit [10] von Yoder enthalten.
Im Abschnitt 2 wird der Typ der Replikativität von S_a festgestellt. Die dabei auftretenden Funktionalgleichungen sind dann besonders einfach strukturiert, wenn $a = p \in \mathbb{P}$ (Menge der Primzahlen) gilt. Daher werden wir ausschliesslich diesen Fall behandeln. Im Abschnitt 3 werden verschiedene Charakterisierungen von S_p gegeben. Insbesondere wird sich herausstellen, dass S_p (bis auf einen konstanten Faktor) die eindeutig bestimmte stetige Lösung eines Systems homogener Funktionalgleichungen der einfachen Bauart $\sum_{j=0}^{n} f(\alpha_j x + \beta_j) = 0$ ist, wobei α_j und β_j rationale Konstanten sind.
Damit ist dann jede stetige Lösung $f \neq 0$ dieses Systems nirgends differenzierbar.

2. Die Replikativität von S_p

Von nun an sei p eine feste Primzahl. Das folgende Lemma ist wesentlich in der Theorie replikativer Funktionen. Es ist seit langem bekannt. Wir geben seinen kurzen Beweis zur Bequemlichkeit des Lesens mit an.

Lemma 1. *Es sei (a_ν) eine multiplikative Folge komplexer Zahlen $(a_{\nu\mu} = a_\nu a_\mu)$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ erklärt durch $g(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \exp(2\pi i \nu x)$.*

Dann ist $\frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1} g\left(\frac{x+m}{k}\right) = a_k g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, also g replikativ vom Typ $(a_k, 0)$.

Beweis.
$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1} g\left(\frac{x+m}{k}\right) &= \frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \exp\left(2\pi i \nu \frac{x+m}{k}\right)\\ &= \frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \exp\left(2\pi i \nu \frac{x}{k}\right)\sum_{m=0}^{k-1}\exp\left(2\pi i \nu \frac{m}{k}\right)\\ &= \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda k}\exp(2\pi i \lambda x)\\ &= a_k \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda \exp(2\pi i \lambda x).\end{aligned}$$

Es wurde benutzt, dass $\sum_{m=0}^{k-1}\exp\left(2\pi i \nu \frac{m}{k}\right)$ den Wert k für $\nu = \lambda k$ und den Wert 0 für $\nu = \lambda k + \varrho$, $1 \leqq \varrho \leqq k-1$, besitzt.

Als Konsequenz ergibt sich ein weiteres Lemma, das wir beim Beweis von Satz 2 und im Abschnitt 3 zur Konstruktion von Gegenbeispielen benötigen.

Lemma 2. *Es sei T eine nichtleere Menge von Primzahlen, $M(T)$ die von T multiplikativ erzeugte Halbgruppe und $H_T(x) := \sum_{\lambda \in M(T)} \frac{1}{\lambda}\exp(2\pi i \lambda x)$ existiere für jedes $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\sum_{m=0}^{k-1} H_T\left(\frac{x+m}{k}\right) = H_T(x) \quad \textit{für} \quad x \in \mathbb{R} \quad \textit{und} \quad k \in M(T) \quad \textit{bzw.}$$
$$\sum_{m=0}^{k-1} H_T\left(\frac{x+m}{k}\right) = 0 \quad \textit{für} \quad x \in \mathbb{R} \quad \textit{und} \quad k \in \mathbb{N}\backslash M(T).$$

Beweis. Es gilt $H_T(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \exp(2\pi i \nu x)$ mit einer multiplikativen Folge (a_ν), nämlich $a_\lambda = \frac{1}{\lambda}$ für $\lambda \in M(T)$ und $a_\mu = 0$ für $\mu \in \mathbb{N}\backslash M(T)$. Die Behauptung folgt unmittelbar aus Lemma 1.

Satz 2. *Es sei $p \in \mathbb{P}$. Dann erfüllt S_p die folgenden Funktionalgleichungen:*

$$f(x+1) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

$$f(-x) = -f(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

$$\sum_{m=0}^{k-1} f\left(\frac{x+m}{k}\right) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \ k \in M(\{p\}), \tag{6}$$

$$\sum_{m=0}^{k-1} f\left(\frac{x+m}{k}\right) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{N} \backslash M(\{p\}). \tag{7}$$

Beweis. (4) und (5) sind klar. Zum Nachweis von (6) und (7) benutzen wir Lemma 2 mit $T = \{p\}$ und beachten, dass $M(T) = \{p^n; n \in \mathbb{N}_0\}$ gilt. Daher konvergiert die $H_T(x)$ definierende Reihe für jedes $x \in \mathbb{R}$, und wir erhalten

$$S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^n} \sin 2\pi p^n x = \sum_{\lambda \in M(T)} \frac{1}{\lambda} \sin 2\pi \lambda x = \operatorname{Im} H_T(x).$$

Die Behauptung unseres Satzes folgt nun durch Vergleich der Imaginärteile.
Wir schreiben von nun an $M(p)$ anstelle $M(\{p\})$.
(6) und (7) besagen, dass S_p replikativ vom Typ $(u_k, 0)$ ist, wobei

$$u_k = \frac{1}{k} \quad \text{für} \quad k \in M(p) \quad \text{und} \quad u_k = 0 \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N} \backslash M(p) \quad \text{gilt.}$$

3. Charakterisierungen von S_p

Im Gegensatz zur Funktionalgleichung (1) sind (4), (5), (6) und (7) homogen. Bei Charakterisierungen von S_p mit Hilfe der Gleichungen (4)–(7) benötigt man eine Normierung, die den Fall $f = 0$ ausschliesst. Es bezeichne

$$\tilde{f}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu(f) \sin 2\pi \nu x, \quad b_\nu(f) = 2 \int_0^1 f(t) \sin 2\pi \nu t \, dt,$$

die Fourierreihe einer Funktion f, die (4) und (5) erfüllt. Dann ergibt sich für $f = S_p$ die Normierung $b_1(f) = 1$. Sie hat den Vorzug, unabhängig von p zu sein im Kontrast zu der ebenfalls möglichen Normierung $f\left(\frac{1}{2p}\right) = \sin \frac{\pi}{p}$.

Satz 3. *Es sei $p \in \mathbb{P}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, 1-periodisch, ungerade mit $b_1(f) = 1$. Gilt dann*

$$\sum_{m=0}^{p-1} f\left(\frac{x+m}{p}\right) = f(x) \quad \textit{für} \quad x \in \mathbb{R} \quad \textit{sowie} \tag{I}$$

$$\sum_{m=0}^{q-1} f\left(\frac{x+m}{q}\right) = 0 \qquad \textit{für} \quad x \in \mathbb{R} \quad \textit{und} \quad q \in \mathbb{P} \backslash \{p\}, \tag{II}$$

so ist $f = S_p$.

Beweis. Die Funktionalgleichung (I) kann iteriert werden und liefert

$$\sum_{m=0}^{k-1} f\left(\frac{x+m}{k}\right) = f(x) \tag{8}$$

für alle $k = p^r$, $r \in \mathbb{N}_0$, also für $k \in M(p)$. Entsprechend folgt aus (II)

$$\sum_{m=0}^{k-1} f\left(\frac{x+m}{k}\right) = 0 \tag{9}$$

für alle $k \in M(\mathbb{P}\backslash\{p\})\backslash\{1\}$. Nun ist jedes $k \in \mathbb{N}\backslash M(p)$ ein Produkt der Form $i \cdot j$ mit $i \in M(p)$ und $j \in M(\mathbb{P}\backslash\{p\})\backslash\{1\}$.
Mit Hilfe von (8) und (9) erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{ij-1} f\left(\frac{x+m}{ij}\right) &= \sum_{\mu=0}^{j-1}\sum_{m=0}^{i-1} f\left(\frac{x+\mu+jm}{ij}\right)\\ &= \sum_{\mu=0}^{j-1}\sum_{m=0}^{i-1} f\left(\frac{\frac{x+\mu}{j}+m}{i}\right)\\ &= \sum_{\mu=0}^{j-1} f\left(\frac{x+\mu}{j}\right) = 0.\end{aligned}$$

Daher folgt aus (I) und (II), dass (8) für jede Potenz k von p erfüllt ist und (9) für jedes k, das nicht Potenz von p ist. Die Fourierreihe $\tilde{f}$ von f hat die Form $\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) \sin 2\pi k x$. Für beliebiges $k \in M(p)$ gilt

$$\begin{aligned}b_1(f) &= 2\int_0^1 f(t)\sin 2\pi t\,dt\\ &= 2\int_0^1 \sum_{m=0}^{k-1} f\left(\frac{t+m}{k}\right)\sin 2\pi t\,dt\\ &= 2k\sum_{m=0}^{k-1}\int_{m/k}^{(m+1)/k} f(t_m)\sin 2\pi(k t_m - m)\,dt_m\\ &= 2k\int_0^1 f(t)\sin 2\pi k t\,dt\\ &= k\,b_k(f).\end{aligned}$$

Wegen $b_1(f) = 1$ ist also $b_k(f) = \frac{1}{k}$ für jedes $k \in M(p)$. Dieselbe Rechnung zeigt, dass im Fall $k \notin M(p)$ gilt:

$$k\,b_k(f) = 2\int_0^1 \sum_{m=0}^{k-1} f\left(\frac{t+m}{k}\right)\sin 2\pi t\,dt = 0.$$

Daher ist

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k \in M(p)} \frac{1}{k} \sin 2\pi k x = S_p(x).$$

Da f stetig, folgt mit dem Satz von Fejér: $f(x) = \tilde{f}(x) = S_p(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.
Wenn im letzten Satz anstelle $b_1(f) = 1$ die Normierung $b_1(f) = \alpha \neq 0$ gefordert wird, erhalten wir $f(x) = \alpha S_p(x)$, also das am Schluss der Einleitung angegebene Resultat. Ein Kommentar zu der Stetigkeitsannahme über f findet sich in Bemerkung 4.

Bemerkung 1. Wenn die Voraussetzung (II) aus Satz 3 abgeschwächt wird zu

$$\sum_{m=0}^{q-1} f\left(\frac{x+m}{q}\right) = 0 \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad q \in \mathbb{P} \setminus T, \tag{II*}$$

wobei T neben p noch wenigstens eine weitere Primzahl enthält, gilt die Aussage des Satzes nicht mehr. Es sei etwa $T = \{p, r\}$ mit $r \in \mathbb{P}$. Wir erhalten ein Gegenbeispiel mit Hilfe von Lemma 2:

$$G_T(x) = \operatorname{Im} H_T(x) = \sum_{\lambda \in M(T)} \frac{1}{\lambda} \sin 2\lambda\pi x = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p^\mu r^\nu} \sin 2\pi p^\mu r^\nu x.$$

G_T ist ungerade, 1-periodisch und stetig mit $b_1(G_T) = 1$, erfüllt (8) für $k \in M(T)$ und (9) für $k \in \mathbb{N} \setminus M(T)$. Es ist klar, dass $G_T \neq S_p$ gilt.

Bemerkung 2. a) Wir gehen aus von der folgenden Feststellung:
S_p ist die einzige stetige, 1-periodische und ungerade Funktion, welche (I) aus Satz 3 und

$$f(x) - \sum_{m=0}^{q-1} f\left(\frac{x+m}{q}\right) = S_p(x) \quad \textit{für} \quad x \in \mathbb{R} \quad \textit{und} \quad q \in \mathbb{P} \setminus \{p\} \tag{III}$$

erfüllt.
Zum Beweis werde $g(x) := f(x) - S_p(x)$ betrachtet, wobei f die o.a. Eigenschaften besitzt. g ist stetig, 1-periodisch und ungerade. Eine leichte Rechnung zeigt, dass $g(x) = \sum_{m=0}^{k-1} g\left(\frac{x+m}{k}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt. Mit der in Satz 3 benutzten Methode ergibt sich $\tilde{g}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_1(g) \frac{1}{k} \sin 2\pi k x$ für die Fourierreihe von g und nach dem Satz von Fejér $g(x) = b_1(g) \cdot \frac{\pi}{2}(1 - 2x)$ für $0 < x < 1$. Da g 1-periodisch und stetig ist, folgt $b_1(g) = 0$ und damit $g = 0$.
b) Die in a) angegebene Charakterisierung von S_p hat gegenüber derjenigen aus Satz 3 den Vorteil, dass keine Normierung benötigt wird. Dagegen ist das Auftreten der zu charakterisierenden Funktion als inhomogener Term in (III) störend (dieser Defekt wird in Satz 5 behoben).

c) Ganz im Gegensatz zu der in Bemerkung 1 geschilderten Situation lässt sich (III) aus a) noch erheblich abschwächen ohne die Gültigkeit der Aussage zu beeinträchtigen. Das besagt

Satz 4. *Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, 1-periodisch und ungerade. Gilt dann*

$$\sum_{m=0}^{p-1} f\left(\frac{x+m}{p}\right) = f(x) \quad \textit{für} \quad x \in \mathbb{R} \quad \textit{und} \tag{I}$$

$$f(x) - \sum_{m=0}^{q-1} f\left(\frac{x+m}{q}\right) = S_p(x) \quad \textit{für} \quad x \in \mathbb{R} \tag{II}$$

und $q \in Q \subset \mathbb{P}$, wobei $\mathbb{P} \backslash Q$ endlich ist, so folgt $f = S_p$.

Beweis. Es sei $g(x) := f(x) - S_p(x)$. g ist stetig, 1-periodisch und ungerade. Ferner gilt wegen (II)

$$\sum_{m=0}^{k-1} g\left(\frac{x+m}{k}\right) = g(x) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \tag{10}$$

und alle $k \in M(Q)$. Es sei

$$Q^* := \left\{ q \in \mathbb{P};\, g(x) = \sum_{m=0}^{q-1} g\left(\frac{x+m}{q}\right) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dann ist $Q \subset Q^*$, wie eben festgestellt.
Wir zeigen nun, dass notwendig $Q^* = \mathbb{P}$ gelten muss. Andernfalls ist $\mathbb{P} \backslash Q^*$ nichtleer, aber endlich, und wir erhalten einen Widerspruch zu dem folgenden Resultat von Lucht ([6], Satz 6): Es existiert keine stetige, 1-periodische Funktion g, so dass (10) gilt für $k \in R$ und nicht gilt für $k \in \mathbb{P} \backslash R$, falls $R \subset \mathbb{P}$, $R \neq \mathbb{P}$ und $\mathbb{P} \backslash R$ endlich. Aus $Q^* = \mathbb{P}$ ergibt sich aber mit der Argumentation aus Bemerkung 2 a), dass g die Nullfunktion ist. Das war zu zeigen.

Bemerkung 3. Für eine Menge Q von Primzahlen mit $p \notin Q$ gelte $Q \in \mathcal{M}$ genau dann, wenn für jedes stetige, 1-periodische, ungerade $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, das (I) aus Satz 4 und (II) für $q \in Q$ erfüllt, notwendig $f = S_p$ ist. Es ist ein schwieriges, bisher ungelöstes Problem, die Menge $\mathcal{M}$ zu charakterisieren. Nach Satz 4 gilt $Q \in \mathcal{M}$, wenn $\mathbb{P} \backslash Q$ endlich ist. Ist $\sum_{q \in Q} \frac{1}{q} < \infty$, also Q nicht «zu gross», so ist $Q \notin \mathcal{M}$. Dann ist nämlich für $T = Q \cup \{p\}$

$$G_T(x) = \sum_{\lambda \in M(T)} \frac{1}{\lambda} \sin 2\pi\lambda x$$

gleichmässig konvergent auf $\mathbb{R}$ wegen $\sum_{\lambda \in M(T)} \frac{1}{\lambda} = \prod_{q \in T} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^{-1} < \infty$. $F := G_T + S_p$ ist also stetig, 1-periodisch und ungerade. Nach Lemma 2 und Satz 2 erfüllt F die Beziehung (I) aus Satz 4 und (II) für $q \in Q$.

Aus Ergebnissen von Lucht und Wolke [7] folgt, dass für Mengen der Form $Q = \{q \in \mathbb{P};\, q \not\equiv 1 \bmod N\}$ gilt $Q \notin \mathscr{M}$ und dass [8] zu jeder monoton wachsenden Funktion $d\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ein $Q \notin \mathscr{M}$ existiert mit $h(x) = \sum_{q \leqq x,\, q \in \mathbb{P} \setminus Q} \frac{1}{q} \leqq d(x)$ für hinreichend grosse x und mit $\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$.

Wir kommen nun zurück auf die Bemerkung 2 b). Wir werden (II) aus Satz 4 ersetzen durch

$$f(x) - \sum_{m=0}^{k-1} p\left(\frac{x+m}{k}\right) = \phi_k(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so wird durch (11) eine stetige Funktion $\phi_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erklärt. Im Fall $f = S_p$ ist nach Satz 2 $\phi_k(x) = S_p(x)$, also $b_1(\phi_k) = b_1(S_p) = 1$ für $k \in \mathbb{N} \setminus M(p)$.

Satz 5. *Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, 1-periodisch und ungerade. Ferner sei*

$$\sum_{m=0}^{p-1} f\left(\frac{x+m}{p}\right) = f(x) \quad \textit{für} \quad x \in \mathbb{R} \quad \textit{und} \tag{I}$$

$$f(x) - \sum_{m=0}^{k-1} f\left(\frac{x+m}{k}\right) = \phi_k(x) \quad \textit{für} \quad x \in \mathbb{R} \tag{II}$$

und $k \in \mathbb{N} \setminus M(p)$. Ist dann $b_1(\phi_k) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N} \setminus M(p)$, so folgt $f = S_p$. (Die Umkehrung dieser Aussage wurde bereits in der Vorbemerkung festgestellt).

Beweis. Erfüllt f die Voraussetzungen des Satzes, so ist für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N} \setminus M(p)$

$$\phi_k(x+1) - \phi_k(x) = f\left(\frac{x}{k}\right) - f\left(\frac{x}{k} + 1\right) = 0,$$

ϕ_k ist also ebenfalls 1-periodisch.

Wie im Beweis von Satz 3 ergibt sich $b_n(f) = \frac{1}{n} b_1(f)$ für $n \in M(p)$. Für $k \in \mathbb{N} \setminus M(p)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} b_1(f) &= 2\int_0^1 f(t) \sin 2\pi t\, dt \\ &= 2\int_0^1 \left[\sum_{m=0}^{k-1} f\left(\frac{t+m}{k}\right) + \phi_k(t)\right] \sin 2\pi t\, dt \\ &= 2k\int_0^1 f(t) \sin 2\pi k t\, dt + 2\int_0^1 \phi_k(t) \sin 2\pi t\, dt \\ &= k\, b_k(f) + b_1(\phi_k). \end{aligned}$$

Daher ist die Fourierreihe $\tilde{f}$ von f gegeben durch

$$\tilde{f}(x) = b_1(f) S_p(x) + \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus M(p)} \frac{1}{k} [b_1(f) - b_1(\phi_k)] \sin 2\pi k x .$$

Ist $b_1(\phi_k) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N} \setminus M(p)$, so ergibt sich

$$\tilde{f}(x) = b_1(f) S_p(x) + (b_1(f) - 1) \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus M(p)} \frac{1}{k} \sin 2\pi k x = b_1(f) S_p(x) + h(x) .$$

Die Reihe $h(x)$ konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz von Fejér ist $f(x) = \tilde{f}(x)$. Also ist $h = f - b_1(f) S_p$ stetig. Das ist nur dann der Fall, wenn $b_1(f) = 1$ gilt. Dann ist aber $f = S_p$.

Bemerkung 4. Wir zeigen noch, dass die Stetigkeitsannahme über f in dem Charakterisierungssatz 3 nicht wesentlich abgeschwächt werden kann. Dazu sei $S_p^*(x) := S_p(x)$, falls x irrational und $S_p^*(x) := 0$, falls x rational. Es gilt $S_p^* \in L^r[0,1]$ für jedes $r > 0$ und $b_1(S_p^*) = 1$; S_p^* ist 1-periodisch sowie ungerade, und S_p^* erfüllt die Gleichungen (I) und (II) aus Satz 3. Wegen

$$S_p\left(\frac{1}{2p}\right) = \sin\frac{\pi}{p} \neq S^*\left(\frac{1}{2p}\right) \quad \text{ist} \quad S_p^* \neq S_p .$$

Ganz entsprechend kann in Satz 5 die Annahme, dass f stetig auf $[0,1]$ ist, nicht ersetzt werden durch $f \in L^r[0,1]$ für alle $r > 0$. Man kann wieder S_p^* als Konkurrenzfunktion nehmen. Die damit verbundene Abänderung der Werte $\phi_k(x)$ für rationale x beeinflusst die Fourierkoeffizienten $b_1(\phi_k)$ nicht.

H.-H. Kairies, TU Clausthal

LITERATURVERZEICHNIS

1 du Bois-Reymond P.: Versuch der Classification der willkürlichen Funktionen reeller Argumente nach ihren Änderungen in den kleinsten Intervallen. J. Reine Angew. Math. *79*, 21–37 (1875).
2 Freud G.: Über trigonometrische Approximation und Fouriersche Reihen. Math. Z. *78*, 252–262 (1962).
3 Hardy G. H.: Weierstrass's non-differentiable function. Trans. Amer. Math. Soc. *20*, 301–325 (1916).
4 Kahane J.-P.: Lacunary Taylor and Fourier series. Bull. Amer. Math. Soc. *70*, 199–213 (1964).
5 Kuczma M.: Functional equations in a single variable. Polish Scientific Publishers, Warszawa 1968.
6 Lucht L.: Zur Charakterisierung der Gamma-Funktion. J. Reine Angew. Math. *288*, 77–85 (1976).
7 Lucht L., Wolke D.: Trigonometrische Reihen über multiplikativen Zahlenmengen. Math. Z. *149*, 155–167 (1976).
8 Lucht L., Wolke D.: Trigonometrische Reihen über multiplikativen Zahlenmengen II. Acta Math. Acad. Sci. Hung. *33*, 263–288 (1979).
9 Weierstraß K.: Über continuierliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen. Mathematische Werke II, G. Olms Verlagsbuchhandlung Hildesheim, Johnson Reprint Corporation New York (Reprografischer Nachdruck der Ausgabe Berlin 1895).
10 Yoder M. F.: Continuous replicative functions. Aequationes Math. *13*, 251–261 (1975).

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/90/030061-09$1.50 + 0.20/0