

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 45 (1990)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Über eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Ungleichung  
**Autor:** Alzer, Horst  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-42411>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Besicovitch A. S.: On the linear independence of fractional powers of integers. *J. London Math. Soc.* 15, 3–6 (1940).  
 [2] Herstein I. N.: *Topics in Algebra*, 2nd ed., John Wiley and Sons, New York 1975.  
 [3] Niven I.: *Irrational Numbers*, Carus Mathematical Monographs of the MAA, no 11, 1956.  
 [4] Patrino G. N.: Sums of irrational square roots are irrational. *Mathematics Magazine* 61, 44–45 (1988).  
 [5] Roth R. L.: On extensions of  $\mathbb{Q}$  by square roots. *Amer. Math. Monthly* 78, 392–393 (1971).

## ANMERKUNGEN

[1\*] Siehe hierzu [1]–[5].

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/90/020051-03\$1.50 + 0.20/0

## Über eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Ungleichung

Im Jahre 1968 veröffentlichte L. Gerber [1] folgende bemerkenswerte Verallgemeinerung der berühmten Bernoullischen Ungleichung:

Für alle nicht-negativen ganzen Zahlen  $k$  und für alle reellen Zahlen  $a$  und  $x$  mit  $-1 < x \neq 0$  gilt:

$$\binom{a}{k+1} x^{k+1} \left[ (1+x)^a - \sum_{p=0}^k \binom{a}{p} x^p \right] \geq 0,$$

wobei der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck genau dann verschwindet, wenn  $a \in \{0, 1, \dots, k\}$ .

Für  $k=1$  erhalten wir die Ungleichung von Bernoulli. Der von Gerber publizierte Induktionsbeweis ist kurz, jedoch recht kompliziert. Das Ziel dieser Note ist es, einen sehr einfachen Beweis für Gerbers Ungleichung anzugeben.

Wir definieren

$$f(x) = f(k, a; x) = (1+x)^a - \sum_{p=0}^k \binom{a}{p} x^p.$$

Differentiation nach  $x$  ergibt für  $n \geq 0$ :

$$f^{(n)}(x) = n! \left[ \binom{a}{n} (1+x)^{a-n} - \sum_{p=n}^k \binom{a}{p} \binom{p}{n} x^{p-n} \right]$$

und es folgt

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, k,$$

sowie

$$f^{(k+1)}(x) = (k+1)! \binom{a}{k+1} (1+x)^{a-k-1}.$$

Der Satz von Taylor liefert somit für  $f$  die Darstellung

$$f(x) = \binom{a}{k+1} (1+cx)^{a-k-1} x^{k+1}, \quad 0 < c < 1.$$

Schließlich erhalten wir

$$\binom{a}{k+1} x^{k+1} \left[ (1+x)^a - \sum_{p=0}^k \binom{a}{p} x^p \right] = \binom{a}{k+1}^2 x^{2(k+1)} (1+cx)^{a-k-1} \geq 0,$$

wobei der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck genau dann gleich Null ist, wenn  $\binom{a}{k+1} = 0$ .

Horst Alzer  
University of the Witwatersrand, Johannesburg

#### LITERATUR

1 Gerber L.: An extension of Bernoulli's inequality. Amer. Math. Monthly 75, 875–876 (1968).

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/90/020053-02\$1.50 + 0.20/0

## Aufgaben

**Aufgabe 1005.** Man beweise: Die durch

$$x_1 = 1, \quad x_n = e - n \cdot x_{n-1} \quad (e \text{ ist die Eulersche Zahl})$$

rekursiv definierte Zahlenfolge  $(x_n)$  strebt mit wachsendem  $n$  gegen Null und divergiert (in dieser Form) bei der Berechnung auf jedem Computer

R. Wyss, Flumenthal

**Lösung** (Bearbeitung der Redaktion). Es sei  $\varepsilon$  der Rundungsfehler (Maschinenfehler) von  $e$  bei der Berechnung der  $x_n$  auf dem Computer. Diese erfolgt also gemäss

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = e + \varepsilon - n x_{n-1}.$$