Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 45 (1990)
Heft: 2

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

The linearity of the Moessner-mapping $(p_n) \mapsto (q_i)$ for fixed (k_i) finishes the job. There are no convergence problems in the infinite summation formula, because every q_i is affected only by a finite number of terms in this summation.
As an example, we take $p_n = n$ and $k_i = i$:
Figure 8 shows that we end up with the factorials!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	2		6	11		18	26	35		46	58	71	85		101
			6			24	50			96	154	225			326
						24				120	274				600
										120					720
															720

Figure 8. The factorials are obtainable in the Moessner-diagram in an obvious way!

Karel A. Post, University of Technology,
Department of Mathematics and Computing Science, Eindhoven

REFERENCES

1 Guy R. K.: Reviews in Number Theorie 1973–1983, Vol. 1 A, Section B 60, pp. 319–320, American Mathematical Society 1984.
2 Guy R. K.: The strong law of small numbers (examples 17, 18, 19 and 20), American Mathematical Monthly *95*, 697–712 (1988).
3 Leveque W. J.: Reviews in Number Theory, as printed in Mathematical Reviews, 1940 through 1972, vol. 1, Section B 60, pp. 335–339, American Mathematical Society 1974.
4 Long C. T.: Strike it out – Add it up. The Mathematical Gazette *66*, 273–277 (1982).
5 Long C. T.: A note on Moessner's process. Fibonacci Quarterly, *24*, 349–355 (1986).
6 Paasche I.: Eine Verallgemeinerung des Moessnerschen Satzes. Compositio Math. *12*, 263–270 (1956).
7 Slater J. G.: Strike it out – Some exercises. The Mathematical Gazette *67*, 288–290 (1983).

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/90/020046-06$1.50 + 0.20/0

Kleine Mitteilungen

Zur linearen Unabhängigkeit von Quadratwurzeln über den rationalen Zahlen

Wir nennen eine Quadratwurzel $\sqrt{a}$ «reduziert», wenn a eine quadratfreie ganz-rationale Zahl ist. Die nichttrivialen reduzierten Quadratwurzeln sind umkehrbar eindeutig den quadratischen Erweiterungskörpern des rationalen Zahlkörpers $\mathbb{Q}$, die «triviale» Wurzel $\sqrt{1}$ dem Körper $\mathbb{Q}$ selbst zugeordnet.
Wir werden zeigen, daß die Menge der reduzierten Quadratwurzeln, d. h. jede endliche Teilmenge, linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist.
Dieses Ergebnis ist – in wesentlich allgemeinerer Form – bekannt [1*]. Bei dieser Note geht es daher um die Methode der Herleitung, die eine, wie ich meine, hübsche und nicht

direkt auf der Hand liegende Anwendung des Hauptsatzes der Galoistheorie darstellt. Beispiele, welche die Kraft dieses Hauptsatzes an Fragestellungen demonstrieren, die nicht unmittelbar zu seinem Anwendungsbereich gehören, gibt es nicht viele.
Seien also n verschiedene reduzierte Quadratwurzeln

$$\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n}$$

vorgegeben. Wir betrachten den Körper

$$E = \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n})$$

der eventuell bereits von weniger Wurzeln erzeugt wird.
Mit $E_j = \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_j})$; $j = 1, 2, \ldots, n$ gelte o.B.d.A.

$$E = E_r = Q(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_r}), \quad [E:Q] = 2^r.$$

Wir werden zeigen, dass die Menge aller in E enthaltenen reduzierten Quadratwurzeln eine Basis von E über $\mathbb{Q}$ bilden, insbesondere also $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind. Dazu bemerken wir zunächst, daß die aus den Basen $\{1, \sqrt{a_j}\}$ der Einzelerweiterungen E_j/E_{j-1} gewonnene Produktbasis von $E/\mathbb{Q}$ aus 2^r Quadratwurzeln, unter ihnen $\sqrt{1}$, besteht.
Durch Reduktion gewinnen wir daraus eine aus $\sqrt{1}$ und $2^r - 1$ nichttrivialen reduzierten Quadratwurzeln bestehende Basis B von $E/\mathbb{Q}$.
Die Galoisgruppe G der galoisschen Erweiterung $E/\mathbb{Q}$ wird von den durch

$$\varphi_j\colon\ \varphi_j(\sqrt{a_i}) = \begin{cases} -\sqrt{a_j}; & i = j \\ \sqrt{a_i}; & i \neq j \end{cases}, \quad j = 1, \ldots, r$$

charakterisierten unabhängigen Automorphismen der Ordnung 2 erzeugt und ist somit ein r-faches direktes Produkt zyklischer Gruppen der Ordnung 2

$$G = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_r \rangle \cong Z_2^r.$$

Sie besitzt genau die 2^r durch

$$\chi_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r}(\varphi_j) = \varepsilon_j \in \{\pm 1\}; \quad j = 1, \ldots, r$$

charakterisierten Homomorphismen in die zyklische Gruppe $Z_2 = \langle -1 \rangle$, somit genau $2^r - 1$ Homomorphismen auf $\langle -1 \rangle$, denen, als Kerne, die Normalteiler vom Index 2 von G bijektiv zugeordnet sind. $(2^r - 1)$ ist daher die Anzahl der Untergruppen vom Index 2 der abelschen Gruppe G, und weiter nach dem Hauptsatz der Galoistheorie die Anzahl der quadratischen Unterkörper von E. Nach der einleitenden Bemerkung liegen also genau $2^r - 1$ nichttriviale reduzierte Quadratwurzeln in E. Die oben erhaltene Basis B besteht somit aus allen in E enthaltenen reduzierten Quadratwurzeln.

K. Burde, Institut für Algebra und Zahlentheorie, TU Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Besicovitch A. S.: On the linear independence of fractional powers of integers. J. London Math. Soc. *15*, 3–6 (1940).
[2] Herstein I. N.: Topics in Algebra, 2nd ed., John Wiley and Sons, New York 1975.
[3] Niven I.: Irrational Numbers, Carus Mathematical Monographs of the MAA, no 11, 1956.
[4] Patruno G. N.: Sums of irrational square roots are irrational. Mathematics Magazine *61*, 44–45 (1988).
[5] Roth R. L.: On extensions of Q by square roots. Amer. Math. Monthly *78*, 392–393 (1971).

ANMERKUNGEN

[1*] Siehe hierzu [1]–[5].

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/90/020051-03$1.50 + 0.20/0

Über eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Ungleichung

Im Jahre 1968 veröffentlichte L. Gerber [1] folgende bemerkenswerte Verallgemeinerung der berühmten Bernoullischen Ungleichung:
Für alle nicht-negativen ganzen Zahlen k und für alle reellen Zahlen a und x mit $-1 < x \neq 0$ gilt:

$$\binom{a}{k+1} x^{k+1} \left[(1+x)^a - \sum_{p=0}^{k} \binom{a}{p} x^p \right] \geq 0,$$

wobei der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck genau dann verschwindet, wenn $a \in \{0, 1, \ldots, k\}$.
Für $k = 1$ erhalten wir die Ungleichung von Bernoulli. Der von Gerber publizierte Induktionsbeweis ist kurz, jedoch recht kompliziert. Das Ziel dieser Note ist es, einen sehr einfachen Beweis für Gerbers Ungleichung anzugeben.
Wir definieren

$$f(x) = f(k, a; x) = (1+x)^a - \sum_{p=0}^{k} \binom{a}{p} x^p.$$

Differentiation nach x ergibt für $n \geq 0$:

$$f^{(n)}(x) = n! \left[\binom{a}{n} (1+x)^{a-n} - \sum_{p=n}^{k} \binom{a}{p} \binom{p}{n} x^{p-n} \right]$$

und es folgt

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, k,$$