

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 45 (1990)
Heft: 1

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

There is of course an extensive literature on these sums of powers, dating back to the Bernoullis. In [1], the authors write down explicitly a recurrence for the sequence of polynomials F_k but apparently fail to notice the simple integral expression for it. In [2] and [3] the integral recurrence is derived but the derivation depends critically on a preliminary lemma to the effect that the formulas are given by polynomials. In other references (see, for example, [4] Problems 17.20–17.29) the derivation of a formula for $\sum_{j=1}^n j^k$ is made somewhat more complicated by the objective of expressing the final result

$$F_k(x) = \frac{1}{k+1} [P_{k+1}(x+1) - P_{k+1}(0)].$$

in terms of Bernoulli polynomials P_k .

In contrast, the approach facilitated by our lemma has two clear advantages. First, it generalizes the result to non-integral exponents α and shows that even in the case of integral exponents $\alpha = k$, non-polynomial versions of the formula are available through different choices of the starting function $F_0(t)$ whose values for $0 < t < 1$ are at our disposal. Second, given that some result along these lines is possible, there is straight forward motivation for the formula of the lemma: consideration of asymptotic values determines the coefficient $\alpha + 1$ and then consideration of the fact that $G(1) = 1$ must hold forces the value of B .

G. Gunther, Memorial University of Newfoundland
J. B. Wilker, University of Toronto

REFERENCES

- 1 Budin M. A., Cantor A. J.: Simplified computation of sums of powers of integers. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 2, 284 (1972).
- 2 Carchidi M.: Two simple recursive formulas for summing $1^k + 2^k + \dots + n^k$. *College Math. J.* 18, 406–409 (1987).
- 3 Levy L. S.: Summation of the series $1^n + 2^n + \dots + x^n$ using elementary calculus. *Amer. Math. Monthly* 77, 840–847 (1970).
- 4 Scheid F.: *Schaum's Outline of Theory and Problems of Numerical Analysis*. McGraw-Hill 1968.

Aufgaben

Aufgabe 1001. Mit den Catalan-Zahlen

$$C(i) = \frac{1}{i+1} \binom{2i}{i}$$

und den Stirling-Zahlen zweiter Art

$$S(k, i) = \frac{1}{i!} \sum_{s=0}^i (-1)^s \binom{i}{s} (i-s)^k$$

bilde man die Zahlen

$$A(k) = \sum_{i=1}^k (-1)^i 4^{-i} i! C(i) S(k, i).$$

Man beweise $A(2n)=0$ für $n=1, 2, 3, \dots$.

J. Binz, Bolligen

Solution. We shall determine $A(k)$ explicitly for all k . Let $f(t)$ be the exponential generating function of the sequence $(A(k))$. Then

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} A(k) \frac{t^k}{k!} = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i 4^{-i} C(i) \sum_{k=i}^{\infty} i! S(k, i) \frac{t^k}{k!} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i 4^{-i} C(i) (e^t - 1)^i = \frac{1 - \sqrt{1 - (1 - e^t)}}{(1 - e^t)/2} - 1 = -\tanh\left(\frac{t}{4}\right) \end{aligned}$$

and so

$$A_{2n}(0) = 0, \quad A(2n-1) = -2(1 - 4^{-n}) \frac{B_{2n}}{n},$$

where B_{2n} is the $2n$ -th Bernoulli number ($n=1, 2, \dots$).

A. A. Jagers, Enschede, NL

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), J. H. van Lint (Eindhoven, NL), R. Wyss (Flumenthal).

Aufgabe 1002. Für nicht negative ganzzahlige m, n beweise man die folgende Identität:

$$\sum_{k=0}^{\min(m, n)} \binom{m}{k} \binom{m+n-k}{m} x^k = \sum_{k=0}^{\min(m, n)} \binom{m}{k} \binom{n}{k} (1+x)^k.$$

U. Graf, La Neuveville

Lösung. Die zu verifizierende Identität ist symmetrisch bezüglich m und n ; denn:

$$\binom{m}{k} \binom{m+n-k}{m} = \binom{n}{k} \binom{m+n-k}{n}.$$

O.E.d.A. können wir daher im folgenden $n \leq m$ voraussetzen. Mit Hilfe der binomischen Entwicklung erhalten wir für die rechte Seite der fraglichen Identität:

$$\sum_{k=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x^j = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n \binom{m}{j} \binom{n}{j} \binom{j}{n} x^k.$$

Wegen

$$\binom{m}{j} \binom{j}{k} = \binom{m}{k} \binom{m-k}{m-j}$$

sowie der bekannten Vandermondeschen Identität

$$\sum_{j=k}^n \binom{m-k}{m-j} \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^m \binom{m-k}{m-j} \binom{n}{j} = \binom{m+n-k}{m}; \quad 0 \leq k \leq n$$

ist damit der Nachweis erbracht.

Hj. Stocker, Wädenswil

Weitere Lösungen standten A. Amman (Yverdon), J. Binz (Bolligen), P. Bundschuh (Köln, BRD), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), M. E. Kuczma (Warszawa, Polen), L. Kuipers (Sierre), J. H. van Lint (Eindhoven, NL), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), K. Schütte (München, BRD), H.-J. Seiffert (Berlin), H. M. Srivastava (Victoria, Canada), J.-Y. Thibon (Enghien, F), M. Vowe (Therwil), P. Weisenhorn (Achern, BRD), H. Widmer (Rieden), R. Wyss (Flumenthal).

Aufgabe 1003. Für $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$ das gewöhnliche Skalarprodukt und $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ die Euklidische Norm. Man zeige, dass

$$\frac{|x| + |y|}{2} \cdot \frac{\langle x, y \rangle}{|x| |y|} \leq \int_0^1 |(1-t)x + t y| dt \leq \frac{|x| + |y|}{2}.$$

H.-J. Seiffert, Berlin (W)

Lösung. Die rechte Hälfte der Behauptung ergibt sich mittels Dreiecksungleichung wie folgt:

$$\int_0^1 |(1-t)x + t y| dt \leq \int_0^1 ((1-t)|x| + t|y|) dt = \frac{|x| + |y|}{2}.$$

Da die linke Hälfte bei $\langle x, y \rangle \leq 0$ trivial ist, sei ab jetzt $\langle x, y \rangle > 0$ vorausgesetzt, insbesondere also $x, y \neq 0$. Dann ist unter zweimaliger Berücksichtigung von $\langle u, v \rangle \leq |u| |v|$

$$\begin{aligned} |x| \int_0^1 |(1-t)x + t y| dt &\geq \int_0^1 \langle x, (1-t)x + t y \rangle dt = \frac{1}{2}(|x|^2 + \langle x, y \rangle) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x}{y} \right| + 1 \right) \langle x, y \rangle = \frac{|x| + |y|}{2} \frac{\langle x, y \rangle}{|y|}. \end{aligned}$$

Division durch $|x|$ liefert hieraus die linke Hälfte der Behauptung.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten H. J. Biner (Zermatt), M. Buchwalder (Thalwil), J. Escher (Solothurn), W. Janous (Innsbruck, A), M. E. Kuczma (Warszawa, Polen), A. Müller (Zürich), Kee-Wai Lau (Hong Kong), A. A. Jagers (Enschede, NL), H. Guggenheimer (New York, USA) O. P. Lossers (Eindhoven, NL), K. Schütte (München, BDR), P. Weisenhorn (Achern, BRD).

Aufgabe 1004. Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ beweise man

$$\prod_{k=0}^{n-1} (\sqrt{n} + \sqrt{k}) < e^n (n!)^{1/2}.$$

V. Mascioni, Origlio

Lösung mit Verallgemeinerung. Es gilt der folgende

Satz: Für $0 < r \leq 1$ ist

$$c_r = e^r \exp \left(\int_0^1 \log(1+x^r) dx \right)$$

die kleinste aller positiven Zahlen c mit der Eigenschaft, dass für beliebige $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\prod_{k=0}^{n-1} (n^r + k^r) < c^n (n!)^r$$

gilt.

Beweis. Da die Funktion $f_r(x) = \log(1+x^r)$ auf $[0, 1]$ streng konkav ist, gilt

$$\frac{1}{2n} (\log(1+((k-1)/n)^r) + \log(1+(k/n)^r)) < \int_{(k-1)/n}^{k/n} \log(1+x^r) dx$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, \dots, n\}$. Summation über $k=1, \dots, n$ liefert

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log(1+(k/n)^r) < \int_0^1 \log(1+x^r) dx - \frac{1}{2n} \log 2$$

und nach Anwendung der Exponentialfunktion erhält man

$$\prod_{k=0}^{n-1} (n^r + k^r) < 2^{-1/2} n^{rn} \exp \left(n \int_0^1 \log(1+x^r) dx \right). \quad (1)$$

Aus der bekannten Stirling-Formel gewinnt man die Ungleichung

$$(2\pi n)^{1/2} n^n e^{-n} < n!,$$

womit sich (1) weiter abschätzen lässt zu

$$\prod_{k=0}^{n-1} (n^r + k^r) < 2^{-1/2} (2\pi n)^{-r/2} c_r^n (n!)^r. \quad (2)$$

Die behauptete Ungleichung folgt offensichtlich aus (2). Es bleibt zu zeigen, dass c_r im Sinne des Satzes bestmöglich ist. Aus

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \log((n/k)^r + 1) &= \int_0^1 \log(x^{-r} + 1) dx \\ &= \int_0^1 \log(1 + x^r) dx - r \int_0^1 \log x dx = \log c_r \end{aligned}$$

erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left((n!)^{-r} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (n^r + k^r) \right) \right)^{1/n} = c_r.$$

Damit ist der Satz in allen Teilen bewiesen. Q.E.D.

Bemerkung. Elementare Integration liefert $c_{1/2} = e$, was die Ungleichung des Aufgabenstellers ergibt. Allgemeiner lässt sich zeigen, dass

$$c_{1/(2p-1)} = 4 \exp \left(\sum_{k=1}^{2p-2} (-1)^k / k \right), \quad c_{1/2p} = \exp \left(\sum_{k=1}^{2p-1} (-1)^{k-1} / k \right).$$

H.-J. Seiffert, Berlin

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A; Verschärfung), M. E. Kuczma (Warszawa, Polen; Verschärfung), Kee-Wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL; Verschärfung), H.-J. Seiffert (Berlin; 2. Lösung, Verschärfung), Hj. Stocker (Wädenswil; Verschärfung), J. Y. Thibon (Enghien, F), H. Widmer (Rieden; Verschärfung), M. Vowe (Therwil).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis 10. August 1990 an Dr. H. Kappus. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 1025. Gegeben ist die diophantische Gleichung

$$(x+y+z+t)^2 = xyzt \quad (1)$$

a) Man beweise, dass (1) unendlich viele Lösungen

$$(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4$$

besitzt.

b) Man ermittle alle Lösungen von (1), welche den Nebenbedingungen

$$x \leq y \leq z \leq t, \quad x+y+z \geq t$$

genügen.

J. Sàndor, Jud. Harghita, Rumänien
G. Berger, Tg-Mureş, Rumänien

LITERATURVERZEICHNIS

Hurwitz, A.: Über eine Aufgabe der unbestimmten Analysis. Math. Werke 2, 421–426 (1933).

Aufgabe 1026. a und b seien positive reelle Zahlen mit $a \neq b$, r sei beliebig reell. Man zeige:

a) Ist $r(r-1)(2r-1) < 0$, so gilt

$$\frac{a^r + b^r}{a^{r-1} + b^{r-1}} < \left(\frac{a^{2r-1} + b^{2r-1}}{2} \right)^{1/(2r-1)} \quad (1)$$

b) Ist $r(r-1)(2r-1) > 0$, so gilt (1) mit $>$ statt $<$.

H.-J. Seiffert, Berlin

Aufgabe 1027. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ bestimme man die Mächtigkeiten der folgenden Mengen:

$$A_n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid x_n = 2n, 2i \leq x_i \leq x_{i+1} \text{ für } i = n-1, n-2, \dots, 1\},$$

$$B_n := \{(y_1, y_2, \dots, y_{2n}) \in \mathbb{N}^{2n} \mid y_{2n} = y_{2n-1} = n, i \leq y_{2i-1} \leq y_{2i} \leq y_{2i+1}$$

$$\text{für } i = n-1, n-2, \dots, 1\}.$$

J. Binz, Bolligen