

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 45 (1990)
Heft: 1

Artikel: An integral recurrence for sums of powers
Autor: Gunther, G.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-42407>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

4.4. Sei $t < n$, $n \equiv 0 \pmod{2}$ und $(a, n) \equiv 1 \pmod{2}$. Wegen $n \equiv 0 \pmod{2}$ und $(a, n) \equiv 1 \pmod{2}$ hat man $a \equiv 1 \pmod{2}$. Für ein $b \in \mathbb{Z}$ folgt aus $(b, n) = 1$ ebenso $b \equiv 1 \pmod{2}$. Eine mögliche zulässige Darstellung $a \equiv b_1 + b_2 \pmod{n}$ von a würde also auf den Widerspruch $1 \equiv 1 + 1 \pmod{2}$ führen. Wegen $\mu_n(a) \geq 2$ (da $t < n$) ist somit $\mu_n(a) \geq 3$. Für Primzahlen $p > 2$ ist $a \not\equiv -2 \pmod{p}$ oder $a \not\equiv 2 \pmod{p}$ und folglich $a \equiv (a + 2) - 1 - 1 \pmod{p^\alpha}$ oder $a \equiv (a - 2) + 1 + 1 \pmod{p^\alpha}$ eine zulässige Darstellung von a . Und wegen $a \equiv 1 \pmod{2}$ ist $a \equiv (a - 2) + 1 + 1 \pmod{2^\beta}$ ein zulässige Darstellung von a . Unter Heranziehung des Lemmas erhält man somit eine zulässige Darstellung $a \equiv b_1 + b_2 + b_3 \pmod{n}$ von a , so daß $\mu_n(a) \leq 3$ und folglich $\mu_n(a) = 3$. Damit sind alle Fälle $\langle t \leq n, n \equiv 0, 1 \pmod{2}, (a, n) \equiv 0, 1 \pmod{2} \rangle$ abgehandelt. Das Theorem ist bewiesen.

H. Bergmann, Hamburg

ANMERKUNGEN

- [1*] Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\varphi(n)$ die Eulersche Funktion.
- [2*] Die Frage ist offensichtlich nur für endliche zyklische Gruppen interessant.
- [3*] Dabei bedeutet $a \in \bar{a}$, daß $a \in \mathbb{Z}$ ein Repräsentant (Element) der Restklasse $\bar{a} \in R_n^+$ ist.
- [4*] Eine Modifizierung des chinesischen Restklassensatzes.

Didaktik und Elementarmathematik

An integral recurrence for sums of powers

Every first year calculus student encounters formulas for the sums of powers of the integers. In this note, we present an elementary proof of the curious fact that the formula for the sum of the $(k + 1)$ st powers can be obtained simply from the integral of the formula for the sum of the k th powers. This integral recurrence provides an easy means for computing these formulas.

We note first that if a function $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i) } F(0) = 0 \quad \text{and} \\ \text{(ii) } F(x + 1) = F(x) + (x + 1)^\alpha \end{array} \right\} (*)$$

for some $\alpha \in \mathbb{R}$, then it follows at once that

$$F(n) = \sum_{j=1}^n j^\alpha$$

for every positive integer n .
 We next prove the following

Lemma. Suppose a function F satisfies condition * for some value of α . Then the new function G defined by setting

$$G(x) = (\alpha + 1) \int_0^x F(t) dt + Bx$$

where

$$B = 1 - (\alpha + 1) \int_0^1 F(t) dt$$

satisfies condition * for the value $\alpha + 1$.

Proof. Certainly $G(0) = 0$. We compute

$$\begin{aligned} G(x+1) &= (\alpha + 1) \int_0^{x+1} F(t) dt + B(x+1) \\ &= (\alpha + 1) \int_0^1 F(t) dt + (\alpha + 1) \int_1^{x+1} F(t) dt + Bx + B \\ &= (\alpha + 1) \int_1^{x+1} F(t) dt + Bx + 1 \\ &= (\alpha + 1) \int_0^x F(t+1) dt + Bx + 1 \\ &= (\alpha + 1) \int_0^x [F(t) + (t+1)^\alpha] dt + Bx + 1 \\ &= (\alpha + 1) \int_0^x F(t) dt + Bx + (\alpha + 1) \int_0^x (t+1)^\alpha dt + 1 \\ &= G(x) + (x+1)^{\alpha+1}. \end{aligned}$$

The reasoning for $\alpha = -1$ differs from the reasoning for $\alpha \neq -1$ at the last step but in either case G satisfies the required condition.

It remains to note that if we begin our recurrence with the function $F_0(x) = x$ (which satisfies condition * for $\alpha = 0$) then we can generate polynomials F_1, F_2, F_3, \dots where

$$F_k(x) = k \int_0^x F_{k-1}(t) dt + B_k x$$

with

$$B_k = 1 - k \int_0^1 F_{k-1}(t) dt.$$

The polynomial F_k defined in this way satisfies condition * for $\alpha = k$ and consequently satisfies

$$F_k(n) = \sum_{j=1}^n j^k$$

for all positive integers n .

There is of course an extensive literature on these sums of powers, dating back to the Bernoullis. In [1], the authors write down explicitly a recurrence for the sequence of polynomials F_k but apparently fail to notice the simple integral expression for it. In [2] and [3] the integral recurrence is derived but the derivation depends critically on a preliminary lemma to the effect that the formulas are given by polynomials. In other references (see, for example, [4] Problems 17.20–17.29) the derivation of a formula for $\sum_{j=1}^n j^k$ is made somewhat more complicated by the objective of expressing the final result

$$F_k(x) = \frac{1}{k+1} [P_{k+1}(x+1) - P_{k+1}(0)].$$

in terms of Bernoulli polynomials P_k .

In contrast, the approach facilitated by our lemma has two clear advantages. First, it generalizes the result to non-integral exponents α and shows that even in the case of integral exponents $\alpha = k$, non-polynomial versions of the formula are available through different choices of the starting function $F_0(t)$ whose values for $0 < t < 1$ are at our disposal. Second, given that some result along these lines is possible, there is straight forward motivation for the formula of the lemma: consideration of asymptotic values determines the coefficient $\alpha + 1$ and then consideration of the fact that $G(1) = 1$ must hold forces the value of B .

G. Gunther, Memorial University of Newfoundland
J. B. Wilker, University of Toronto

REFERENCES

- 1 Budin M. A., Cantor A. J.: Simplified computation of sums of powers of integers. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics 2, 284 (1972).
- 2 Carchidi M.: Two simple recursive formulas for summing $1^k + 2^k + \dots + n^k$. College Math. J. 18, 406–409 (1987).
- 3 Levy L. S.: Summation of the series $1^n + 2^n + \dots + x^n$ using elementary calculus. Amer. Math. Monthly 77, 840–847 (1970).
- 4 Scheid F.: Schaum's Outline of Theory and Problems of Numerical Analysis. McGraw-Hill 1968.

Aufgaben

Aufgabe 1001. Mit den Catalan-Zahlen

$$C(i) = \frac{1}{i+1} \binom{2i}{i}$$

und den Stirling-Zahlen zweiter Art

$$S(k, i) = \frac{1}{i!} \sum_{s=0}^i (-1)^s \binom{i}{s} (i-s)^k$$