Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 44 (1989)
Heft: 5

Rubrik: Kleine Mitteilung

For $b \to -1$ point A approaches $(-a, -a)$ and P moves, after it has passed A, along a line that approaches the line $x = -a$.
For $b = -1$ the curve passes through $(-a, -a)$, here p is infinite.
For $b < -1$ the winch is eased off so quickly that P cannot be trailed anymore.
It will be clear that P and Q only meet each other for positive b. From (6) and (7) it can be derived that this will happen at point $(a, a/b)$.
Thanks are due to Mr H. J. de Vries for performing many calculations.

R. Sanders, Zuidwolde, The Netherlands

 0013-6018/89/050124-06$1.50 + 0.20/0

Kleine Mitteilung

Über die Zahlenfolge $n! + k,\ 2 \leqq k \leqq n$

Fast jedes Buch über Zahlentheorie erwähnt die Tatsache, dass keine der Zahlen

$$n! + k \quad \text{mit} \quad 2 \leqq k \leqq n \tag{1}$$

eine Primzahl ist (es gibt also in der Folge der Primzahlen beliebig lange Lücken). Es scheint aber nicht allgemein bekannt zu sein, dass dieselbe Zahlenfolge auch die Unendlichkeit der Primzahl-Menge beherbergt. Dies entnimmt man dem folgenden

Satz 1. Für jedes $n > 1$ und $2 \leqq k \leqq n$ hat $n! + k$ entweder einen Primfaktor $> n$, oder aber k ist prim und grösser als $n/2$ und $n! + k$ ist eine Potenz von k.

Beweis. Sei $2 \leqq k \leqq n$. Für alle Primzahlen $p \leqq n$, welche $n! + k$ teilen, ist $p | k$. Falls $p < k$, also $p \in \{2, \ldots, k-1\}$ ist, gilt

$$p \,|\, n!/k \quad \text{und damit} \quad p \nmid (n!/k) + 1 = (n! + k)/k.$$

Die Zahl $(n! + k)/k$ und mit ihr $n! + k$ besitzt somit Primteiler $> n$. Hat also $n! + k$ nur Primteiler $\leqq n$, so ist k prim und dies ist der einzige Primteiler von $n! + k$.
Aus

$$n! + k = k^s, \quad s \geqq 2$$

folgt

$$k \nmid k^{s-1} - 1 = n!/k, \quad \text{also} \quad k > n/2.$$

Korollar 1. Für festes n hat jedes Glied der Zahlenfolge (1) einen Primfaktor, der in keinem andern Glied der Folge aufgeht.

Beweis. Hat $n! + k$ einen Primfaktor $> n$, so leistet dieser – wie man leicht einsieht – das Verlangte. Andernfalls übernimmt k diese Rolle.

Korollar 2. Es gibt unendlich viele Primzahlen.
Dies folgt unmittelbar aus dem Korollar 1; dieses garantiert zu jeder Zahl $n > 1$ die Existenz von $n - 1$ Primzahlen.
Nach Grundhöfer [1] weiss man, dass für $n > 5$ keine der Zahlen (1) eine Primzahlpotenz sein kann. Somit kann die zweite im Satz 1 erwähnte Möglichkeit in Wirklichkeit nicht eintreten. Also gilt

Satz 2. Für jedes $n \geqq 6$ und $2 \leqq k \leqq n$ hat die Zahl $n! + k$ mehr als einen Primteiler, und mindestens einer davon ist grösser als n.

M. R. Chowdhury, Dhaka University, Bangladesh

LITERATURVERZEICHNIS

1 Grundhöfer T.: Über die Zahlen der Form $n! + k$, Arch. Math. *33*, 361–363 (1979).

 0013-6018/89/050129-02$1.50 + 0.20/0

Didaktik und Elementarmathematik

Eine weitere Lösung der Thébault'schen Aufgabe

In der Geometrie freut man sich immer, wenn bei einer Beweisaufgabe, die mit analytischen Mitteln gelöst werden kann, sich auch ein Lösungsweg findet, der ohne Gleichungen und trigonometrische Umformungen auskommt. Ein Beispiel liefert die vor fünfzig Jahren von V. Thébault gestellte Aufgabe:

Gegeben ist ein Dreieck ABC. T sei ein Punkt der Seite AB, und M_1, M_2 seien die Mittelpunkte der Füllkreise, welche die Seite AB, die Strecke CT und den Umkreis des Dreiecks berühren (Fig. 1). Man zeige, dass M_1, M_2 und der Inkreismittelpunkt I des Dreiecks kollinear sind.

Die Aufgabe wurde von C. Stanley Ogilvy in seine bekannte Problemsammlung [1] aufgenommen mit der Bemerkung, diese Aufgabe sei elementar, aber schwierig und könne bei hinreichendem Scharfsinn ziemlich sicher unter Verwendung rein synthetischer Methoden gelöst werden.