

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 44 (1989)
Heft: 5

Artikel: Das Volumen spezieller konvexer Polytope
Autor: Martini, Horst
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-41617>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Vol. 44

Nr. 5

Seiten 113–144

Basel, September 1989

Das Volumen spezieller konvexer Polytope

Während der Oberwolfacher Tagung über «Konvexe Körper» im Jahre 1974 wurde das folgende Problem von E. Heil (siehe auch [2], Nr. 23): gestellt: «Sei Q die konvexe Hülle von d Strecken im \mathbb{R}^d . Ist das Volumen von Q nicht kleiner als das Volumen eines Simplexes S , welches durch Translate dieser d Strecken mit gemeinsamem Endpunkt definiert ist?»

In der Arbeit [6] gab P. McMullen eine positive Antwort zu einer natürlichen Verallgemeinerung dieses Problems, zusätzlich mit Kennzeichnungen des Gleichheitsfalles. Es soll nun hier ein elementargeometrischer, rein induktiver Beweis zu Heil's ursprünglichem Problem vorgelegt werden, d. h. die entsprechend eingeschränkte Form von McMullen's Antwort wird, einschließlich der Charakterisierungen des Gleichheitsfalles, elementar bewiesen.

Für grundlegende Begriffe und Bezeichnungen sei auf [3] verwiesen. Insbesondere bezeichne \mathbb{R}^d ($d \geq 2$) den d -dimensionalen euklidischen Raum mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Einheitssphäre S^{d-1} . Weiterhin steht \mathbb{K}^d für die Menge der konvexen Körper, d. h. der kompakten, konvexen Untermengen des \mathbb{R}^d mit inneren Punkten.

Das äussere $(d-1)$ -Quermaß $\bar{V}_{d-1}(K, u)$ von $K \in \mathbb{K}^d$ in Richtung $u \in S^{d-1}$ ist der Flächeninhalt der orthogonalen Projektion von K in der Hyperebene $H_u := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, u \rangle = 0\}$, während das innere 1-Quermass $V_1(K, u)$ von K bezüglich u die maximale Länge einer Sehne dieses Körpers in Richtung u angibt (vgl. [1], § 7).

Seien nun p und q zwei Randpunkte von $K \in \mathbb{K}^d$ in verschiedenen, parallelen Stützhyperebenen dieses Körpers. Wir nennen K einen *schiefen Doppelkegel* bezüglich der Richtung $u = \lambda(p - q)$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, wenn jeder Randpunkt dieses Körpers mit wenigstens einem der Punkte p, q durch eine Randstrecke von K verbunden werden kann.

Wie allgemein bekannt ist (siehe z. B. [4]), gilt für das Volumen $V_d(K)$ eines konvexen Körpers $K \in \mathbb{K}^d$ und jede Richtung $u \in S^{d-1}$ die Ungleichung

$$V_d(K) \geq \frac{1}{d} \bar{V}_{d-1}(K, u) \cdot V_1(K, u). \quad (1)$$

Wir werden (1) bestätigen und außerdem zeigen, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn K schiefer Doppelkegel bezüglich u ist (vgl. auch [5]). Hierfür sei $P = \text{conv}\{p, q\}$ eine Sehne von K in Richtung u mit der Länge $V_1(K, u)$ und E eine beliebige abgeschlossene 2-Halbebene mit der Randgeraden L durch p und q . Die Menge $E \cap K$ enthält ein (möglicherweise entartetes) Dreieck mit Basis P und einem Randpunkt von $E \cap K$ mit maximalem Abstand von L als Gegenecke. Mit dem Satz von Fubini erhält man die rechte Seite von (1) durch Integration über all diesen Dreiecken, und wegen der Konvexität von K hat man Gleichheit in (1) genau dann, wenn für jedes E die Menge $E \cap K$ mit dem beschriebenen Dreieck zusammenfällt.

Das ist offensichtlich äquivalent zu der Eigenschaft von K , schiefer Doppelkegel bezüglich u zu sein.

Schliesslich sei L_1, \dots, L_d als System von d Strecken mit d linear unabhängigen Richtungen eingeführt. Es gilt nun das folgende

Theorem: Die d -dimensionalen konvexen Körper Q und S seien dem eingangs formulierten Heilschen Problem entsprechend gegeben. Dann gilt

$$V_d(Q) \geq V_d(S) > 0$$

mit Äquivalenz der Eigenschaften

$$(A) \quad V_d(Q) = V_d(S),$$

$$(B) \quad \text{bd } Q = \cup \{ \text{conv} \{x_1, \dots, x_d\} \mid x_i \in \text{rel bd } L_i \text{ mit } i = 1, \dots, d \},$$

$$(C) \quad \text{conv} \{x_1, \dots, x_d\} \subseteq \text{bd } Q \text{ gilt für alle } x_i \in \text{rel bd } L_i \text{ mit } i = 1, \dots, d.$$

Beweis: Die Richtigkeit des Satzes für $d = 2$ als Basis der Induktion über d ist klar. Die Gültigkeit der Aussagen sei nun für den \mathbb{R}^{d-1} angenommen, wobei die Punktmenge Q' , S' und L_1, \dots, L_{d-1} entsprechend die Bedingungen des Heilschen Problems erfüllen sollen und $V_{d-1}(\cdot)$ für das korrespondierende Volumen steht. Somit gilt im \mathbb{R}^{d-1} die Ungleichung $V_{d-1}(Q') \geq V_{d-1}(S')$ mit Äquivalenz von

$$(A') \quad V_{d-1}(Q') = V_{d-1}(S'),$$

$$(B') \quad \text{bd } Q' = \cup \{ \text{conv} \{x'_1, \dots, x'_{d-1}\} \mid x'_i \in \text{rel bd } L_i \text{ mit } i = 1, \dots, d-1 \},$$

$$(C') \quad \text{für alle } x'_i \in \text{rel bd } L_i \text{ (} i = 1, \dots, d-1 \text{) gilt } \text{conv} \{x'_1, \dots, x'_{d-1}\} \subseteq \text{bd } Q'.$$

Da die Richtungen der Strecken L_1, \dots, L_d im \mathbb{R}^d linear unabhängig sind, kann das System L_1, \dots, L_{d-1} als Bild von L_1, \dots, L_{d-1} bei orthogonaler Projektion π des \mathbb{R}^d auf den $(d-1)$ -Raum $\{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, u_d \rangle = 0\}$ mit $u_d = \lambda(y_d - z_d)$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, interpretiert werden, indem $L_d = \text{conv} \{y_d, z_d\}$ als beliebige Strecke des Originalsystems verstanden sein soll. Die Induktionsvoraussetzung impliziert nun

$$\bar{V}_{d-1}(Q, u_d) \geq \bar{V}_{d-1}(S, u_d) \tag{2}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn für L_1, \dots, L_{d-1} die Bedingungen

$$\pi(L_d) \in \text{conv}(L_1, \dots, L_{d-1}),$$

(A'), (B') und (C') gelten. Darüber hinaus hat man

$$V_1(Q, u_d) \geq V_1(S, u_d) \tag{3}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn (wie im Falle eines Simplexes S) L_d eine Sehne maximaler Länge von Q in der Richtung von L_d ist. Da jede Facette (d.h. $(d-1)$ -Seitenfläche) eines d -Simplexes S genau d Ecken aus der gesamten Eckenmenge (bestehend aus y_d, z_d

und $d - 1$ weiteren Punkten) enthält, gehören y_d oder z_d (oder beide) zu jeder Facette dieses Polytops. Nach Definition ist S demzufolge schiefer Doppelkegel bezüglich u_d , und

$$V_d(S) = \frac{1}{d} \bar{V}_{d-1}(S, u_d) \cdot V(S, u_d) \tag{4}$$

muß gelten. Mit Blick auf (1), (2) und (3) erhält man also $V_d(S) \leq V_d(Q)$. Gleichheit gilt genau dann, wenn diese auch in jeder der drei Beziehungen (in (1) für $K = Q$) erfüllt ist. Wir werden nun zeigen, daß somit die Äquivalenz von (A'), (B') und (C') auf die d -dimensionale Konfiguration übertragen wird. Bezeichnet $Z(u_d)$ den *Stützzylinder* (d. h. die Vereinigung aller Stützgeraden) von Q in Richtung u_d , so gilt $\bar{V}_{d-1}(Q, u_d) = \bar{V}_{d-1}(S, u_d)$ genau dann, falls (B') die Beziehung

$$\begin{aligned} &(\text{conv} \cup \{L_1, \dots, L_{d-1}\}) \cap Z(u_d) \\ &= \cup \{ \text{conv} \{x_1, \dots, x_{d-1}\} \mid x_i \in \text{rel bd } L_i, i = 1, \dots, d - 1 \} \end{aligned} \tag{5}$$

impliziert und, entsprechend, die schwächere Forderung (C') auf die Inklusion

$$\begin{aligned} \text{conv} \{x_1, \dots, x_{d-1}\} \subseteq [(\text{conv} \cup \{L_1, \dots, L_{d-1}\}) \cap Z(u_d)] \\ \text{für alle } x_i \in \text{rel bd } L_i (i = 1, \dots, d - 1) \end{aligned} \tag{6}$$

führt.

In (3) gilt Gleichheit genau dann, wenn y_d, z_d in parallelen Stützhyperebenen von Q liegen. Gilt zusätzlich (1), dann muß $K = Q$ schiefer Doppelkegel bezüglich u_d sein. Aus der Definition eines solchen konvexen Körpers kann man sofort schlussfolgern, dass genau alle Punkte der Menge $Q \cap Z(u_d)$ sowohl mit y_d als auch mit z_d durch im Rand von Q liegende Strecken verbunden werden können. Mit (5), (6) und

$$(\text{conv} \cup \{L_1, \dots, L_{d-1}\}) \cap Z(u_d) \subseteq Q \cap Z(u_d)$$

impliziert diese Eigenschaft die Äquivalenz von (A), (B) und (C).

Horst Martini, Sektion Mathematik, Pädagogische Hochschule, Dresden

LITERATUR

- [1] Bonnesen T., Fenchel W.: Theorie der konvexen Körper, Neuauflage. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1974.
- [2] Gruber P., Schneider R.: Problems in Geometric Convexity. Ed. by P. Gruber and J. M. Wills: Contributions to Geometry. Proc. Geom. Sympos. Siegen 1978, pp. 255–278, Birkhäuser, Basel 1979.
- [3] Grünbaum B.: Convex Polytopes. Wiley, London, New York, Sydney 1967.
- [4] Macbeath A. M.: A compactness theorem for affine equivalence classes of convex regions. Canad. J. Math. 3, 54–61 (1951).
- [5] Martini H.: A new view on some characterizations of simplices, Arch. Math. (to appear).
- [6] McMullen P.: The volume of certain convex sets. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 91, 91–97 (1982).