Das Volumen spezieller konvexer Polytope

Autor(en): **Martini, Horst**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **44 (1989)**

Heft 5

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-41617

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. | Vol. 44 | Nr. 5 | Seiten 113–144 | Basel, September 1989

Das Volumen spezieller konvexer Polytope

Während der Oberwolfacher Tagung über «Konvexe Körper» im Jahre 1974 wurde das folgende Problem von E. Heil (siehe auch [2], Nr. 23): gestellt: *«Sei Q die konvexe Hülle von d Strecken im $\mathbb{R}^d$. Ist das Volumen von Q nicht kleiner als das Volumen eines Simplexes S, welches durch Translate dieser d Strecken mit gemeinsamem Endpunkt definiert ist?»*
In der Arbeit [6] gab P. McMullen eine positive Antwort zu einer natürlichen Verallgemeinerung dieses Problems, zusätzlich mit Kennzeichnungen des Gleichheitsfalles. Es soll nun hier ein elementargeometrischer, rein induktiver Beweis zu Heil's ursprünglichem Problem vorgelegt werden, d. h. die entsprechend eingeschränkte Form von McMullen's Antwort wird, einschließlich der Charakterisierungen des Gleichheitsfalles, elementar bewiesen.
Für grundlegende Begriffe und Bezeichnungen sei auf [3] verwiesen. Insbesondere bezeichne $\mathbb{R}^d$ $(d \geqq 2)$ den *d-dimensionalen euklidischen Raum* mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Einheitssphäre S^{d-1}. Weiterhin steht $\mathbb{K}^d$ für die Menge der *konvexen Körper*, d. h. der kompakten, konvexen Untermengen des $\mathbb{R}^d$ mit inneren Punkten.
Das *äussere $(d-1)$-Quermaß* $\bar{V}_{d-1}(K,u)$ von $K \in \mathbb{K}^d$ in Richtung $u \in S^{d-1}$ ist der Flächeninhalt der orthogonalen Projektion von K in der Hyperebene $H_u := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, u \rangle = 0\}$, während das *innere 1-Quermass* $\underline{V}_1(K,u)$ von K bezüglich u die maximale Länge einer Sehne dieses Körpers in Richtung u angibt (vgl. [1], § 7).
Seien nun p und q zwei Randpunkte von $K \in \mathbb{K}^d$ in verschiedenen, parallelen Stützhyperebenen dieses Körpers. Wir nennen K einen *schiefen Doppelkegel* bezüglich der Richtung $u = \lambda(p-q)$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, wenn jeder Randpunkt dieses Körpers mit wenigstens einem der Punkte p, q durch eine Randstrecke von K verbunden werden kann.
Wie allgemein bekannt ist (siehe z. B. [4]), gilt für das *Volumen* $V_d(K)$ eines konvexen Körpers $K \in \mathbb{K}^d$ und jede Richtung $u \in S^{d-1}$ die Ungleichung

$$V_d(K) \geqq \frac{1}{d} \bar{V}_{d-1}(K,u) \cdot \underline{V}_1(K,u). \tag{1}$$

Wir werden (1) bestätigen und außerdem zeigen, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn K schiefer Doppelkegel bezüglich u ist (vgl. auch [5]). Hierfür sei $P = \operatorname{conv}\{p,q\}$ eine Sehne von K in Richtung u mit der Länge $\underline{V}_1(K,u)$ und E eine beliebige abgeschlossene 2-Halbebene mit der Randgeraden L durch p und q. Die Menge $E \cap K$ enthält ein (möglicherweise entartetes) Dreieck mit Basis P und einem Randpunkt von $E \cap K$ mit maximalem Abstand von L als Gegenecke. Mit dem Satz von Fubini erhält man die rechte Seite von (1) durch Integration über all diesen Dreiecken, und wegen der Konvexität von K hat man Gleichheit in (1) genau dann, wenn für jedes E die Menge $E \cap K$ mit dem beschriebenen Dreieck zuammenfällt.

Das ist offensichtlich äquivalent zu der Eigenschaft von K, schiefer Doppelkegel bezüglich u zu sein.
Schliesslich sei $L_1, \ldots, L_d$ als System von d Strecken mit d linear unabhängigen Richtungen eingeführt. Es gilt nun das folgende

Theorem: *Die d-dimensionalen konvexen Körper Q und S seien dem eingangs formulierten Heilschen Problem entsprechend gegeben. Dann gilt*

$$V_d(Q) \geqq V_d(S) > 0$$

mit Äquivalenz der Eigenschaften

(A) $V_d(Q) = V_d(S)$,

(B) $\operatorname{bd} Q = \cup \{\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_d\} \mid x_i \in \operatorname{rel\,bd} L_i \quad mit \quad i = 1, \ldots, d\}$,

(C) $\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_d\} \subseteq \operatorname{bd} Q$ *gilt für alle* $x_i \in \operatorname{rel\,bd} L_i$ *mit* $i = 1, \ldots, d$.

Beweis: Die Richtigkeit des Satzes für $d = 2$ als Basis der Induktion über d ist klar. Die Gültigkeit der Aussagen sei nun für den $\mathbb{R}^{d-1}$ angenommen, wobei die Punktmengen Q', S' und $L'_1, \ldots, L'_{d-1}$ entsprechend die Bedingungen des Heilschen Problems erfüllen sollen und $V_{d-1}(\cdot)$ für das korrespondierende Volumen steht. Somit gilt im $\mathbb{R}^{d-1}$ die Ungleichung $V_{d-1}(Q') \geqq V_{d-1}(S')$ mit Äquivalenz von

(A′) $V_{d-1}(Q') = V_{d-1}(S')$,

(B′) $\operatorname{bd} Q' = \cup \{\operatorname{conv}\{x'_1, \ldots, x'_{d-1}\} \mid x'_i \in \operatorname{rel\,bd} L'_i \quad mit \quad i = 1, \ldots, d-1\}$,

(C′) *für alle* $x'_i \in \operatorname{rel\,bd} L'_i$ $(i = 1, \ldots, d-1)$ *gilt* $\operatorname{conv}\{x'_1, \ldots, x'_{d-1}\} \subseteq \operatorname{bd} Q'$.

Da die Richtungen der Strecken $L_1, \ldots, L_d$ im $\mathbb{R}^d$ linear unabhängig sind, kann das System $L'_1, \ldots, L'_{d-1}$ als Bild von $L_1, \ldots, L_{d-1}$ bei orthogonaler Projektion π des $\mathbb{R}^d$ auf den $(d-1)$-Raum $\{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, u_d \rangle = 0\}$ mit $u_d = \lambda(y_d - z_d)$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, interpretiert werden, indem $L_d = \operatorname{conv}\{y_d, z_d\}$ als beliebige Strecke des Originalsystems verstanden sein soll. Die Induktionsvoraussetzung impliziert nun

$$\bar{V}_{d-1}(Q, u_d) \geqq \bar{V}_{d-1}(S, u_d) \tag{2}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn für $L'_1, \ldots, L'_{d-1}$ die Bedingungen

$$\pi(L_d) \in \operatorname{conv}(L'_1, \ldots, L_{d-1}),$$

(A′), (B′) und (C′) gelten. Darüber hinaus hat man

$$\underline{V}_1(Q, u_d) \geqq \underline{V}_1(S, u_d) \tag{3}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn (wie im Falle eines Simplexes S) L_d eine Sehne maximaler Länge von Q in der Richtung von L_d ist. Da jede Facette (d.h. $(d-1)$-Seitenfläche) eines d-Simplexes S genau d Ecken aus der gesamten Eckenmenge (bestehend aus y_d, z_d

und $d-1$ weiteren Punkten) enthält, gehören y_d oder z_d (oder beide) zu jeder Facette dieses Polytops. Nach Definition ist S demzufolge schiefer Doppelkegel bezüglich u_d, und

$$V_d(S) = \frac{1}{d} \bar{V}_{d-1}(S, u_d) \cdot \underline{V}(S, u_d) \tag{4}$$

muß gelten. Mit Blick auf (1), (2) und (3) erhält man also $V_d(S) \leqq V_d(Q)$. Gleichheit gilt genau dann, wenn diese auch in jeder der drei Beziehungen (in (1) für $K = Q$) erfüllt ist. Wir werden nun zeigen, daß somit die Äquivalenz von (A'), (B') und (C') auf die d-dimensionale Konfiguration übertragen wird. Bezeichnet $Z(u_d)$ den *Stützzylinder* (d.h. die Vereinigung aller Stützgeraden) von Q in Richtung u_d, so gilt $\bar{V}_{d-1}(Q, u_d) = \bar{V}_{d-1}(S, u_d)$ genau dann, falls (B') die Beziehung

$$\begin{aligned}(\operatorname{conv} \cup \{L_1, \ldots, L_{d-1}\}) \cap Z(u_d) \\ = \cup \{\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{d-1}\} \mid x_i \in \operatorname{rel\,bd} L_i,\ i = 1, \ldots, d-1\}\end{aligned} \tag{5}$$

impliziert und, entsprechend, die schwächere Forderung (C') auf die Inklusion

$$\begin{aligned}\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{d-1}\} \subseteq [(\operatorname{conv} \cup \{L_1, \ldots, L_{d-1}\}) \cap Z(u_d)] \\ \text{für alle} \quad x_i \in \operatorname{rel\,bd} L_i \ (i = 1, \ldots, d-1)\end{aligned} \tag{6}$$

führt.

In (3) gilt Gleichheit genau dann, wenn y_d, z_d in parallelen Stützhyperebenen von Q liegen. Gilt zusätzlich (1), dann muß $K = Q$ schiefer Doppelkegel bezüglich u_d sein. Aus der Definition eines solchen konvexen Körpers kann man sofort schlussfolgern, dass genau alle Punkte der Menge $Q \cap Z(u_d)$ sowohl mit y_d als auch mit z_d durch im Rand von Q liegende Strecken verbunden werden können. Mit (5), (6) und

$$(\operatorname{conv} \cup \{L_1, \ldots, L_{d-1}\}) \cap Z(u_d) \subseteq Q \cap Z(u_d)$$

impliziert diese Eigenschaft die Äquivalenz von (A), (B) und (C).

Horst Martini, Sektion Mathematik, Pädagogische Hochschule, Dresden

LITERATUR

[1] Bonnesen T., Fenchel W.: Theorie der konvexen Körper, Neuauflage. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1974.

[2] Gruber P., Schneider R.: Problems in Geometric Convexity. Ed. by P. Gruber and J. M. Wills: Contributions to Geometry. Proc. Geom. Sympos. Siegen 1978, pp. 255–278, Birkhäuser, Basel 1979.

[3] Grünbaum B.: Convex Polytopes. Wiley, London, New York, Sydney 1967.

[4] Macbeath A. M.: A compactness theorem for affine equivalence classes of convex regions. Canad. J. Math. *3*, 54–61 (1951).

[5] Martini H.: A new view on some characterizations of simplices, Arch. Math. (to appear).

[6] McMullen P.: The volume of certain convex sets. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. *91*, 91–97 (1982).

 0013-6018/89/050113-03$1.50 + 0.20/0