REFERENCES

1 Affentranger F.: Generalization of a formula of C. Buchta about the convex hull of random points. Elem. Math. *43*, 39–45 (1988).
2 Affentranger F.: Remarks on the note "Generalization of a formula of C. Buchta about the convex hull of random points". Elem. Math. *43*, 151–152 (1988).
3 Buchta C.: Distribution Independent Properties of the Convex Hull of Random Points. Preprint (1988).
4 Chihara T. S.: An Introduction to Orthogonal Polynomials. Math. and its appl. *13*, Gordon and Breach 1978.
5 Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.: Higher Transcendental Functions, Volume I. McGraw-Hill, New York 1953.

 0013-6018/89/040104-03$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 989. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Winkel eines ebenen Dreiecks und $\alpha_1 \leqq \alpha_2, \alpha_3$. Dann gilt die Ungleichung

$$\alpha_1 \leqq 2 \operatorname{arc\,cot}(\sqrt{3} + \textstyle\sum(1/\alpha_i) - 9/\pi)$$

mit Gleichheit genau im gleichseitigen Fall. Dies ist zu beweisen.

V. D. Mascioni, Origlio

Lösung. O.B.d.A. darf noch $\alpha_2 \leqq \alpha_3$ vorausgesetzt werden, was mit $\alpha_2 \leqq (\pi - \alpha_1)/2$ äquivalent ist. Da die behauptete Ungleichung mit

$$(*) \quad \cot(\alpha_1/2) - 1/\alpha_1 + 9/\pi - \sqrt{3} \geqq 1/\alpha_2 + 1/(\pi - \alpha_1 - \alpha_2)$$

für $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq (\pi - \alpha_1)/2$ gleichbedeutend ist, wobei $0 < \alpha_1 \leqq \pi/3$ zu gelten hat, genügt es festzustellen, dass die rechte Seite von (*), betrachtet als Funktion von α_2, im Intervall $[\alpha_1, (\pi - \alpha_1)/2]$ monoton fällt. Daher ist (*) richtig, sobald

$$(**) \quad F(\alpha_1) := \cot(\alpha_1/2) - 2/\alpha_1 - 1/(\pi - 2\alpha_1) \geqq \sqrt{3} - 9/\pi$$

für alle $\alpha_1 \in]0, \pi/3]$ bewiesen ist. Aus $\sin^2 y \leqq y^2$ für alle reellen y folgt

$$F'(x) = -1/(2\sin^2 \tfrac{x}{2}) + 2/x^2 - 2/(\pi - 2x)^2 < -2/(\pi - 2x)^2,$$

weshalb F in $]0, \pi/3]$ streng monoton fällt. Damit ist $F(\alpha_1) \geqq F(\pi/3) = \sqrt{3} - 9/\pi$ für $0 < \alpha_1 \leqq \pi/3$ mit Gleichheit genau für $\alpha_1 = \pi/3$, d.h. im Fall der Gleichseitigkeit.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hong-Kong), B. Ruh (Zürich), P. Weisenhorn (Achern, BRD).
Eine Lösung war fehlerhaft.

Aufgabe 990. Gegeben sei eine beliebige komplexe magische (3,3)-Matrix A (d.h.: alle 6 Zeilen- und Spaltensummen sowie die Summen der Haupt- und Nebendiagonalen stimmen überein). Man ermittle die Eigenwerte von A.

I. Paasche, Stockdorf, BRD

Lösung. Jede magische (3,3)-Matrix A kann wie folgt geschrieben werden:

$$A = \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -2a+b+4c & a+b+c & 4a+b-2c \\ 2a+2b-c & 2a-b+2c & -a+2b+2c \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ und $m := 3(a+b+c)$ als magische Summe.
Für die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von A gilt:

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3,$$

und

$$\mathrm{Spur}\, A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = m.$$

Da offensichtlich

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m \end{pmatrix}$$

gilt, ergibt sich sofort: $\lambda_1 = m$. Somit muss $\lambda_2 = -\lambda_3$ sein.
Wegen

$$\det A = m \cdot (-9a^2 + 9c^2 + 18ab - 18bc)$$

und

$$\det A = -m \cdot \lambda_2^2$$

erhält man schliesslich

$$\lambda_2 = 3\sqrt{(a-c)(a+c-2b)}$$
$$\lambda_2 = -3\sqrt{(a-c)(a+c-2b)}$$

W. Raffke, Vechta, BRD

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bolligen), R. Bundschuh (Hürth, BRD), K.-D. Drews (Rostock, DDR), J. M. Ebersold (Winterthur), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), H. Kummer (Burgdorf), A. Müller (Zürich), B. Ruh (Zürich), Hj. Stocker (Wädenswil), K. Schütte, München (BRD), M. Vowe (Therwil), P. Weisenhorn (Achern, BRD), R. Wyss (Flumenthal; 2 Lösungen).

Aufgabe 991. Prove that if the area of face S of a tetrahedron is the average of the areas of the other three faces, then the line joining the incenter to the centroid of the tetrahedron is parallel to face S.

S. Rabinowitz, Littleton, USA

Lösung (n-dimensional). Ein n-dimensionales Simplex habe die Eckenmenge $E = \{p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}\}$, den Schwerpunkt G, den Inkugelmittelpunkt I, den Inkugelradius ϱ und den n-dimensionalen Inhalt V.
Seine $(n-1)$-dimensionalen Randsimplices M_i mit Eckenmengen

$$E \backslash \{p_i\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

haben den $(n-1)$-dimensionalen Inhalt A_i, und es gelte die Voraussetzung

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A_i = A_{n+1}.$$

Dann gilt

$$V = \frac{\varrho}{n} \sum_{i=1}^{n+1} A_i = \frac{\varrho(n+1)}{n} A_{n+1}.$$

$\dfrac{V}{n+1} = \dfrac{\varrho}{n} A_{n+1}$ ist dann je der n-dimensionale Inhalt der beiden Simplices $\{p_1, p_2, \ldots, p_n, I\}$ und $\{p_1, p_2, \ldots, p_n, G\}$.
I und G liegen folglich in einer $(n-1)$-dimensionalen Parallelhyperebene zu M_{n+1}; somit ist die Gerade IG zu M_{n+1} parallel.

J. Binz, Bolligen

Weitere Lösungen sandten W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), P. Weisenhorn (Achern, BRD).

Aufgabe 992. It is shown in [1] that

$$\sqrt{2(a^2+b^2)} \geqq \sqrt{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta} + \sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta} \geqq a + b.$$

Prove more generally that

$$(*) \quad \left\{ n^{p-1} \sum_{i=1}^{n} a_i^p \right\}^{1/p} \geqq S \geqq A$$

where $S = \sum_{i=1}^{n} \{a_1^p x_i^p + a_2^p x_{i+1}^p + \ldots + a_n^p x_{i+n-1}^p\}^{1/p}$, $A = \sum a_i$, $p \geqq 1$, $x_i = x_{i+n}$, and $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = 1$.

M. S. Klamkin, Alberta, CD

REFERENCES

1 Hobson E. W.: A Treatise on Plane & Advanced Trigonometry. Dover, New York, 1957, pp. 87–88.

Lösung. Die Funktion $f(x) = x^{1/p}$ $(x > 0)$ ist konkav. Wegen $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = 1$ liefert die Jensensche Ungleichung

$$f(a_1^p x_i^p + a_2^p x_{i+1}^p + \ldots + a_n^p x_{i+n-1}^p) \geqq x_i^p f(a_1^p) + x_{i+1}^p f(a_2^p) + \ldots + x_{i+n-1}^p f(a_n^p)$$

f.a. $i = 1, \ldots, n$. Summation über $i = 1, \ldots, n$ liefert wegen $x_i = x_{i+n}$ und $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = 1$ die rechte Seite der behaupteten Ungleichung. Für $p = 1$ steht auf der linken Seite der behaupteten Ungleichung offensichtlich das Gleichheitszeichen. Ist $p > 1$, so gilt mit $q = p/(p-1)$ nach der Hölderschen Ungleichung

$$n^{1/q}\left(\sum_{i=1}^{n} (a_1^p x_i^p + a_2^p x_{i+1}^p + \ldots + a_n^p x_{i+n-1}^p)\right)^{1/p}$$
$$\geqq \sum_{i=1}^{n} (a_1^p x_i^p + a_2^p x_{i+1}^p + \ldots + a_n^p x_{i+n-1}^p)^{1/p}.$$

Dies ist wegen $x_i = x_{i+n}$ und $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = 1$ die linke Seite der behaupteten Ungleichung.

H.-J. Seiffert, Berlin

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bolligen), P. Bundschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), H. Kummer (Burgdorf).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Februar 1990* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68), Problem 872 A (Band 36, S. 175), Aufgabe 880 (Band 37, S. 93).

Aufgabe 1013. Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ ist die Summe

$$S_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left\{\binom{n}{2k+1} + \frac{1}{2}\binom{n+1}{2k+1} - \frac{1}{4}\binom{n+2}{2k+1}\right\} \cdot 5^k$$

geschlossen auszuwerten.

L. Kuipers, Sierre

Aufgabe 1014. A circle meets each side of a regular n-gon, $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ in two points. The circle cuts side $A_i A_{i+1}$ (with $A_{n+1} = A_1$) in points B_i and C_i with B_i lying between A_i and A_{i+1} and C_i lying between B_i and A_{i+1}. Prove that

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i B_i| = \sum_{i=1}^{n} |C_i A_{i+1}|.$$

S. Rabinowitz, Westford, USA

Aufgabe 1015. Die Zahlenfolge (a_n) ist durch $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ und die Rekursion

$$\begin{vmatrix} 1 & a_n & a_{n-1} \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-3} \end{vmatrix} = 1 \quad (n \geqq 3)$$

gegeben. Man bestimme a_n als Funktion von n und berechne

$$\lim_{n \to \infty} (a_n/a_{n+1}).$$

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 1016. Für nichtnegative reelle Zahlen x, y, z beweise man die Ungleichung

$$(\sqrt{(x+y+z)^2 + 4xyz} - x - y - z + 1)(yz + zx + xy) \geqq 6xyz.$$

Wann genau gilt das Gleichheitszeichen?

W. Janous, Innsbruck, A

Literaturüberschau

R. Remmert und P. Ullrich: Elementare Zahlentheorie. 276 Seiten, Fr. 42.–. Birkhäuser, Basel, Boston 1987.
Adressaten dieser Einführung in die Zahlentheorie sind für einmal nicht Spezialisten, sondern Mathematik-Studenten in den mittleren Semestern sowie Mathematik-Lehrer, die ihre Kenntnisse in einem Teilgebiet der Mathematik wieder auffrischen möchten. So ist das Buch in die Reihe der Produktionen des Birkhäuser-Verlages zu stellen, mit denen primär die Bedürfnisse von Mathematik-Lernenden abgedeckt werden sollen. Für viele Sparten der Mathemtik hat man bei den wissenschaftlichen Verlagen im deutschsprachigen Raum diese Sorte von Buch-Benutzern erst in letzter Zeit ausgemacht.
Das vorliegende Buch ist aus einer 4-stündigen Sommersemester-Vorlesung von R. Remmert an der Universität Münster hervorgegangen. Seiner Zielsetzung entsprechend ist es absichtlich etwas breiter angelegt; es kann daher als Vorlesungsbegleit Verwendung finden und ist zugleich auch für das Selbststudium gut geeignet.
Die einzelnen Kapitel und die wichtigsten Abschnitte tragen folgende Überschriften:

1. Primzerlegung in $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$
2. Theorie des grössten gemeinsamen Teilers in $\mathbb{Z}$ (Verteilung der Primzahlen, multiplikative zahlentheoretische Funktionen)
3. Zahlentheorie in allgemeinen Integritätsbereichen (Polynom-Ringe, Euklidische Ringe)
4. Der g-adische Algorithmus (Sätze über g-adische Entwicklungen, insbesondere Dezimal-Entwicklungen)
5. Kongruenzen und Restklassenringe (Rechen-Proben, Anwendungen in der Kryptographie, Der chinesische Restsatz)
6. Prime Restklassengruppen (Elementare Gruppentheorie, Zyklische prime Restklassengruppen)
7. Theorie der quadratischen Reste.