Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 44 (1989)
Heft: 4

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

REFERENCES

1 Dobbs D. E.: Proving Heron's formula tangentially. College Math. J. *15*, 252–253 (1984).
2 Dobbs D. E.: A classroom note on the tangent expansion formula. Computer and Math. Educ. J. *18*, 119–120 (1984).
3 Dobbs D. E.: A trigonometry-based method for constructing square roots by straight-edge and compass. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. *15*, 127–128 (1984).
4 Dobbs D. E.: A tangential approach to central angles. Illinois Math. Teacher *36*, 18–23 (1985)
5 Dobbs D. E.: The law of tangents: a new proof and an application. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. *19*, 759–763 (1988).

© 1989 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/89/040101-04$1.50 + 0.20/0

Kleine Mitteilungen

An explicit formula about the convex hull of random points

Denote by $V_n^{(d)}$ the expected volume of the convex hull of n points chosen independently according to a given probability measure μ in Euclidean d-space E^d. For $d = 2, 3$ and μ the uniform distribution on a convex body in E^d, Affentranger [1], [2] has shown that

$$V_{d+2m}^{(d)} = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \binom{d+2m}{2k-1} V_{d+2m-2k+1}^{(d)} \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

where the γ_k can be obtained recursively from $\gamma_1 = \frac{1}{2}$, $2\gamma_k = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{2k-1}{2i-1} \gamma_i \, (k \geq 2)$.

Recently, Buchta [3] has extended this result to arbitrary dimensions d and to arbitrary probability measures μ on E^d. The key point in [3] is the existence of a moment functional $\mathscr{M}$ such that

$$V_{d+1+n}^{(d)} = \binom{d+1+n}{d+1} \mathscr{M}(x^n + (1-x)^n). \tag{2}$$

(See [4] for the definition of moment functionals.)
In this note we show that in formula (1) the γ_k can be expressed explicitly by

$$\gamma_k = (2^{2k} - 1)\frac{B_{2k}}{k} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Here the B_n are the *Bernoulli numbers* (see e.g. [5], section 1.13), defined by the generating series $z/(e^z - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n/n!$. In our proof of formula (1) we can avoid the elimination process used in [1].

The *Euler polynomials* $E_n(x)$ (see e.g. [5], section 1.14) are defined by the generating series

$$\frac{2e^{xz}}{e^z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{z^n}{n!} \quad (|z|<\pi). \tag{4}$$

Usually, the Euler polynomials are expanded in powers of $x-\frac{1}{2}$. We need the less known expansion in powers of x. Thus put $\tilde{B}_n = E_n(0)$. Then the numbers $\tilde{B}_n$ are defined by the generating series

$$\frac{2}{e^z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_n\frac{z^n}{n!} \quad (|z|<\pi). \tag{5}$$

Differentiation of $2/(e^z+1)$ gives the even function $-2e^z/(e^z+1)^2$; hence $\tilde{B}_{2n}=0$ for $n \geq 1$. Since

$$\frac{2z}{e^z+1} = \frac{2z}{e^z-1} - \frac{4z}{e^{2z}-1},$$

we can also express $\tilde{B}_n$ in terms of the Bernoulli number B_{n+1}:

$$\tilde{B}_n = -(2^{n+1}-1)\frac{2B_{n+1}}{n+1}. \tag{6}$$

We read off from (4) that $E_0(x)=1$, $E_n'(x) = nE_{n-1}(x)$. This leads to

$$E_n(x) = x^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\tilde{B}_k x^{n-k}. \tag{7}$$

Next, we see from $2e^{(1-x)z}/(e^z+1) = 2e^{-xz}/(e^{-z}+1)$ that $E_{2m-1}(x)+E_{2m-1}(1-x)=0$. Now we obtain the key expansion by substituting this in equation (7) and by using $\tilde{B}_{2k}=0$:

$$x^{2m-1}+(1-x)^{2m-1} = -\sum_{k=1}^{m}\binom{2m-1}{2k-1}\tilde{B}_{2k-1}(x^{2m-2k}+(1-x)^{2m-2k}). \tag{8}$$

Finally we use expression (2) for $V_{d+2m}^{(d)}$ and substitute it into equation (8). This gives

$$\begin{aligned} V_{d+2m}^{(d)} &= -\binom{d+2m}{d+1}\sum_{k=1}^{m}\binom{2m-1}{2k-1}\tilde{B}_{2k-1}\binom{d+2m-2k+1}{d+1}^{-1} V_{d+2m-2k+1}^{(d)} \\ &= -\sum_{k=1}^{m}\binom{d+2m}{2k-1}\tilde{B}_{2k-1}V_{d+2m-2k+1}^{(d)}. \end{aligned}$$

In view of (6), this proves (1) and (3).

E. Badertscher, Mathematisches Institut der Universität Bern

REFERENCES

1 Affentranger F.: Generalization of a formula of C. Buchta about the convex hull of random points. Elem. Math. *43*, 39–45 (1988).
2 Affentranger F.: Remarks on the note "Generalization of a formula of C. Buchta about the convex hull of random points". Elem. Math. *43*, 151–152 (1988).
3 Buchta C.: Distribution Independent Properties of the Convex Hull of Random Points. Preprint (1988).
4 Chihara T. S.: An Introduction to Orthogonal Polynomials. Math. and its appl. *13*, Gordon and Breach 1978.
5 Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.: Higher Transcendental Functions, Volume I. McGraw-Hill, New York 1953.

© 1989 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/89/040104-03$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 989. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Winkel eines ebenen Dreiecks und $\alpha_1 \leqq \alpha_2, \alpha_3$. Dann gilt die Ungleichung

$$\alpha_1 \leqq 2 \operatorname{arc\,cot}(\sqrt{3} + \sum(1/\alpha_i) - 9/\pi)$$

mit Gleichheit genau im gleichseitigen Fall. Dies ist zu beweisen.

V. D. Mascioni, Origlio

Lösung. O.B.d.A. darf noch $\alpha_2 \leqq \alpha_3$ vorausgesetzt werden, was mit $\alpha_2 \leqq (\pi - \alpha_1)/2$ äquivalent ist. Da die behauptete Ungleichung mit

$$(*) \quad \cot(\alpha_1/2) - 1/\alpha_1 + 9/\pi - \sqrt{3} \geqq 1/\alpha_2 + 1/(\pi - \alpha_1 - \alpha_2)$$

für $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq (\pi - \alpha_1)/2$ gleichbedeutend ist, wobei $0 < \alpha_1 \leqq \pi/3$ zu gelten hat, genügt es festzustellen, dass die rechte Seite von (*), betrachtet als Funktion von α_2, im Intervall $[\alpha_1, (\pi - \alpha_1)/2]$ monoton fällt. Daher ist (*) richtig, sobald

$$(**) \quad F(\alpha_1) := \cot(\alpha_1/2) - 2/\alpha_1 - 1/(\pi - 2\alpha_1) \geqq \sqrt{3} - 9/\pi$$

für alle $\alpha_1 \in]0, \pi/3]$ bewiesen ist. Aus $\sin^2 y \leqq y^2$ für alle reellen y folgt

$$F'(x) = -1/(2\sin^2 \tfrac{x}{2}) + 2/x^2 - 2/(\pi - 2x)^2 < -2/(\pi - 2x)^2,$$

weshalb F in $]0, \pi/3]$ streng monoton fällt. Damit ist $F(\alpha_1) \geqq F(\pi/3) = \sqrt{3} - 9/\pi$ für $0 < \alpha_1 \leqq \pi/3$ mit Gleichheit genau für $\alpha_1 = \pi/3$, d. h. im Fall der Gleichseitigkeit.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hong-Kong), B. Ruh (Zürich), P. Weisenhorn (Achern, BRD).
Eine Lösung war fehlerhaft.