

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 44 (1989)  
**Heft:** 3  
  
**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Aufgaben

**Aufgabe 985.** Welche Normale eines Kegelschnittes begrenzt zusammen mit dem Kegelschnitt ein Segment minimaler Fläche?

H. Widmer, Rieden

**Lösung des Aufgabenstellers** (Bearbeitung der Redaktion).

Die gesuchten Normalen sind diejenigen, welche mit den Kegelschnittachsen den Winkel  $45^\circ$  bilden.

*Beweis.* Für die Ellipse  $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$  lautet die Gleichung einer Normalen  $n$  mit der Steigung  $m > 0$ :

$$n: (b^2 m^2 + a^2)^{1/2} (m x - y) + m(b^2 - a^2) = 0. \quad (1)$$

Durch die das Flächenverhältnis invariant lassende Normalaffinität  $(x, y) \mapsto (x, a y/b)$ , welche die Ellipse in den Kreis  $k: x^2 + y^2 = a^2$  abbildet, geht  $n$  über in die Gerade

$$(b^2 m^2 + a^2)^{1/2} (a m x - b y) + a m(b^2 - a^2) = 0 \quad (2)$$

welche mit  $k$  genau dann ein minimales Segment begrenzt, wenn ihr Abstand  $d(m)$  vom Mittelpunkt 0 maximal ist. Nach (2) ist aber

$$d^2(m) = a^2 (b^2 - a^2)^2 m^2 / (a^2 m^2 + b^2)(b^2 m^2 + a^2). \quad (3)$$

Nullsetzen der 1. Ableitung von (3) führt auf  $m(m^2 + 1)(m^2 - 1) = 0$  mit der positiven Lösung  $m = 1$ .

Die Hyperbel  $-b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$  besitzt unter den Nebenbedingungen  $a/b < m < b/a$  Normalen mit der Steigung  $m > 0$ , welche die Kurve in zwei Punkten  $P_i = (x_i, y_i)$  schneiden ( $i = 1, 2$ , Normale in  $P_1$ ). Man findet

$$x_1 = -a^2 (b^2 m^2 - a^2)^{-1/2},$$

$$x_2 = a^2 ((a^2 + 2b^2)m^2 + a^2 b^2) / (b^2 - a^2 m^2) (b^2 m^2 - a^2)^{1/2}.$$

Für die Segmentfläche ergibt sich durch Integration

$$F(m) = a^2 b^2 (a^2 + b^2) \frac{m(m^2 + 1)}{(b^2 - a^2 m^2)(b^2 m^2 - a^2)} + \frac{ab}{2} \ln \frac{(bm - a)(b - am)}{(bm + a)(b + am)}.$$

Die Minimumbedingung führt auf  $(m^2 + 2)(2m^2 + 1)(m^2 - 1) = 0$  mit der positiven Lösung  $m = 1$ .

Für die Parabel  $x^2 = 2py$  verläuft die Normale mit positiver Steigung  $m$  durch die Punkte mit den Abszissen

$$x_1 = -p/m, \quad x_2 = 2pm + p/m.$$

Man erhält daraus für die Segmentfläche

$$F(m) = (2p^2/3)(m^2 + 1)^2/m^3,$$

und aus der Minimumbedingung  $(m^2 + 1)^2(m^2 - 1) = 0$  folgt wiederum als einzige positive Lösung  $m = 1$ .

Weitere Lösungen sandten L. Kuipers (Sierre; Teillösung), K. Schütte (München, BRD), P. Weisenhorn (Achern, BRD).

**Aufgabe 986.** Die Folge  $(a_n)$  sei definiert durch

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 8, \quad a_{n+2} = 3 \cdot a_{n+1} - a_n \quad \text{für } n \geq 1.$$

Man berechne den Wert der Summe

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (\log(a_n + 1) - \log(a_n - 1)).$$

M. Vowe, Therwill

*Solution.* The answer is:  $S = \log 3$ . This follows from the following more general result, on substituting  $A = 3$ , and  $a_n = u_{n+1}$ .

*Proposition.* Let  $A \in \mathbb{Z}$ ,  $A \geq 3$ . Define  $(u_n)$  by

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_{n+2} = A \cdot u_{n+1} - u_n \quad \text{für } n \geq 0.$$

Then

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{u_n + 1}{u_n - 1} = \frac{A}{A - 2}.$$

*Proof.* Put  $\alpha = \frac{1}{2} \cdot (A + \sqrt{A^2 - 4})$ . Then  $\alpha$  and  $\alpha^{-1}$  are the roots of the equation  $x^2 = A \cdot x - 1$ . It is easy to show (e.g. by induction) that

$$u_n = (\alpha^n - \alpha^{-n}) / \sqrt{A^2 - 4} \quad \text{für } n \geq 0.$$

We now have

$$\begin{aligned} \frac{u_n + 1}{u_n - 1} &= \frac{\alpha^n - \alpha^{-n} + \sqrt{A^2 - 4}}{\alpha^n - \alpha^{-n} - \sqrt{A^2 - 4}} = \frac{\alpha^{2n} + \sqrt{A^2 - 4} \cdot \alpha^n - 1}{\alpha^{2n} - \sqrt{A^2 - 4} \cdot \alpha^n - 1} \\ &= \frac{(\alpha^n - \alpha^{-1}) \cdot (\alpha^n + \alpha)}{(\alpha^n + \alpha^{-1}) \cdot (\alpha^n - \alpha)} = \frac{(\alpha^{n+1} - 1) \cdot (\alpha^{n-1} + 1)}{(\alpha^{n+1} + 1) \cdot (\alpha^{n-1} - 1)}. \end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned}
 \prod_{n=2}^{\infty} \frac{u_n + 1}{u_n - 1} &= \prod_{n=2}^{\infty} \frac{(\alpha^{n+1} - 1) \cdot (\alpha^{n-1} + 1)}{(\alpha^{n+1} + 1) \cdot (\alpha^{n-1} - 1)} \\
 &= \prod_{n=3}^{\infty} \frac{\alpha^n - 1}{\alpha^n + 1} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n + 1}{\alpha^n - 1} = \frac{(\alpha + 1) \cdot (\alpha^2 + 1)}{(\alpha - 1) \cdot (\alpha^2 - 1)} \\
 &= \frac{\alpha^2 + 1}{(\alpha - 1)^2} = \frac{A \cdot \alpha}{A \cdot \alpha - 2 \cdot \alpha} = \frac{A}{A - 2}. \quad \square
 \end{aligned}$$

B. M. M. de Weger, Enschede, NL

Weitere Lösungen sandten S. Arslanagic (Trebinje, YU) P. Bracken (Toronto, CD), P. Bundschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-Wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), K. Schütte (München, BRD), H.-J. Seiffert (Berlin), Hj. Stocker (Wädenswil), P. Weisenhorn (Achern, BRD), C. Wildhagen (Breda, NL).

**Aufgabe 987.** Man bestimme die kleinste reelle Zahl  $r$  und die grösste reelle Zahl  $s$  derart, daß für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $0 < a < b$  gilt:

$$\left( \frac{a+b}{r} \right)^{b-a} < \left( \frac{e}{a} \right)^a \left( \frac{b}{e} \right)^b < \left( \frac{a+b}{s} \right)^{b-a}.$$

H. Alzer, Waldbröl, BRD

**Lösung.** Man betrachte die in  $D_f = \{x \mid 1 < x < \infty\}$  definierte und (beliebig oft) differenzierbare Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \exp\left(\frac{x \ln x}{x-1}\right). \quad (1)$$

Wir wollen zeigen, daß  $f(x)$  streng monoton fällt. Die Bedingung hierfür lautet:

$$f'(x) < 0, \quad x \in D_f.$$

Durch logarithmische Ableitung ergibt sich aus (1)

$$f'(x) = \frac{f(x)}{(x-1)^2} \left( 2 \frac{x-1}{x+1} - \ln x \right). \quad (2)$$

Wegen  $f(x) > 0$  ist für die Monotonie nur das Vorzeichen von

$$\varphi(x) := 2 \frac{x-1}{x+1} - \ln x$$

von Interesse. Es gilt

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^2 < 0 \quad \text{für jedes } x \in D_f.$$

Folglich ist  $\varphi(x)$  streng monoton fallend, und wegen  $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = 0$  gilt  $\varphi(x) < 0$  für alle  $x \in D_f$ . Damit ist nach (2) auch  $f'(x) < 0$ , d.h.  $f(x)$  nimmt in  $D_f$  monoton ab. Weiterhin folgt aus

$$g(x) := \ln f(x) = \frac{\ln x}{x-1} - \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$$

unter Anwendung der l'Hospital'schen Regel und mit Rücksicht auf die Monotonie

$$\inf g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \inf_{x \in D_f} f(x) = 1$$

$$\sup g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \ln \frac{e}{2} \Rightarrow \sup_{x \in D_f} f(x) = \frac{e}{2}.$$

Man hat also

$$1 < f(x) < \frac{e}{2}, \quad x \in D_f. \quad (3)$$

Setzt man jetzt  $x = \frac{b}{a} > 1$  ( $0 < a < b$ ), so geht (3) durch identische Umformungen über in

$$\left( \frac{a+b}{e} \right)^{b-a} < \left( \frac{e}{a} \right)^a \left( \frac{b}{e} \right)^b < \left( \frac{a+b}{2} \right)^{b-a}.$$

Die in der Aufgabe genannte Ungleichung gilt demzufolge für alle  $r, s \in \mathbb{R}$  mit  $r \geq e$ ,  $0 < s \leq 2$ , wobei unter den zulässigen Zahlen  $r = e$  die kleinste,  $s = 2$  die grösste ist.

F. Götze, Jena, DDR

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), K. Schütte (München, BRD), H.-J. Seiffert (Berlin), M. Vowe (Therwil), P. Weisenhorn (Achern, BRD), H. Widmer (Rieden).

**Aufgabe 988.** For  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m > n > 0$ , let  $f(t) = I_m(t)/I_n(t)$ , where

$$I_p(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2k+p}}{k!(k+p)!}$$

is the modified Bessel function of the first kind and order  $p (p \in \mathbb{N})$ . Prove that  $f$  is increasing on  $(0, \infty)$  with limit 0, if  $t \downarrow 0$  and limit 1, if  $t \rightarrow \infty$

A. A. Jagers, Enschede, NL

**Lösung.** Offenbar ist  $I_p(t) \geq 0$  in  $t \geq 0$  mit Gleichheit genau für  $t = 0$ . Demnach ist  $f := I_m/I_n$  bei ganzzahligen  $m > n \geq 0$  in  $t \geq 0$  definiert. Aus

$$I_p(t) = \frac{1}{p!} \left(\frac{t}{2}\right)^p (1 + O(t^2)) \quad \text{bei } t \rightarrow 0 \quad (1)$$

bzw.

$$(2\pi t)^{1/2} e^{-t} I_p(t) \rightarrow 1 \quad \text{bei } t \rightarrow \infty \quad (2)$$

(vgl. [1], S. 377) folgen die beiden behaupteten Limesaussagen sofort. Das streng monotone Anwachsen von  $f$  in  $t \geq 0$  zeigen wir, indem wir  $f'(t) > 0$  in  $t > 0$  nachweisen. Wegen  $I_n^2 f' = I'_m I_n - I_m I'_n$  reicht dazu der Nachweis, dass  $g := I'_m I_n - I_m I'_n$  in  $t > 0$  positiv ist. Hierzu wiederum beachten wir die aus (1) folgende Formel

$$g(t) = \frac{m-n}{2m!n!} \left(\frac{t}{2}\right)^{m+n-1} (1 + O(t^2)) \quad \text{bei } t \rightarrow 0,$$

weshalb  $g$  für alle genügend kleinen  $t > 0$  positiv ist. Aus der Differentialgleichung  $t^2 I_p'' + t I_p' - (t^2 + p^2) I_p = 0$  (vgl. [1], S. 374) ergibt sich ausserdem

$$g'(t) + \frac{1}{t} g(t) = \frac{m^2 - n^2}{t^2} I_m(t) I_n(t). \quad (3)$$

Angenommen nun,  $g$  hätte in  $\mathbb{R}_+$  Nullstellen; wegen (3) sind diese einfach und isoliert. Ist  $t_0$  die kleinste derartige Nullstelle, so folgt  $g'(t_0) > 0$  aus (3), andererseits aber

$$g'(t_0) = \lim_{t \uparrow t_0} \frac{g(t_0) - g(t)}{t_0 - t} \leq 0$$

aus  $g(t) > 0$  für  $0 < t < t_0$ . Der erzielte Widerspruch zeigt  $g(t) > 0$  für all  $t > 0$ .

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Abramowitz M. und Stegun I. A.: Handbook of Mathematical Functions (Ninth Printing). Dover Publ. Inc., New York 1970.

B. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten W. Janous (Innsbruck, A), K. Schütte (München, BRD).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis 10. Dezember 1989 an Dr. H. Kappus. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68), Problem 872 A (Band 36, S. 175), Aufgabe 880 (Band 37, S. 93).

**Aufgabe 1009.**  $n$  Zahlen  $x_1, \dots, x_n$  mit  $x_i \in \{0, 1, \dots, k\}$  ( $k \geq 2$ ) werden einmal linear, ein andermal kreisförmig so angeordnet, dass die Summe zweier Nachbarglieder stets von  $k + 1$  verschieden ist. Für beide Fälle bestimme man die Anzahl der zulässigen Anordnungen.

J. Binz, Bolligen

**Aufgabe 1010.** Es sei

$$F(z) := \prod_{h=1}^{\infty} (1 + z^{10^h}), \quad |z| < 1.$$

Mit  $\varepsilon := \exp(2\pi i/99)$  werde gesetzt

$$G(z) := (1/99) \sum_{j=0}^{98} F(\varepsilon^j z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k, \quad |z| < 1.$$

Man zeige, dass  $g_k \neq 0$  für unendlich viele  $k$  und ermittle das kleinste  $k > 0$  mit  $g_k \neq 0$ .

P. Bundschuh, Köln, BRD

**Aufgabe 1011.** Die Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  sei folgendermassen rekursiv definiert:

$$f(1) = 1, \quad f(2n) = f(n) + g(n-1), \quad f(2n+1) = f(n+1) + g(n/2)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ , wobei  $g(x)$  die kleinste Zweierpotenz  $> x$  bezeichnet. Man zeige, dass  $f$  involutorisch ist, d. h. dass  $f(f(n)) = n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

K. Schütte, München, BRD

**Aufgabe 1012.** Für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 2$  sei

$$I_n := \int_0^{\infty} (1 + x^n)^{-1/2} dx.$$

Man gebe mindestens ein Zahlenpaar  $(r, s)$  mit  $r \neq s$  an, derart, dass das Verhältnis  $I_r/I_s$  rational ist.

M. Vowe, Therwil