

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 44 (1989)
Heft: 3

Artikel: A remark on the gamma function
Autor: Sándor, J. / Harghita, Jud. / Tóth, L.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-41612>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

No	a	b	c	d	Number of primes given by $an^3 + bn^2 + cn + d$ for				
					$n < 100$	$n < 200$	$n < 300$	$n < 400$	$n < 500$
(1)	1	-220	16 119	-392 723	75	134	179	219	261
(2)	1	-199	13 190	-290 869	75	124	163	206	235
(3)	1	-160	8 547	-142 811	75	130	179	221	264
(4)	1	-159	8 420	-148 153	76	124	164	203	238
(5)	1	-151	7 610	-129 097	76	125	168	204	245
(6)	1	-150	7 493	-124 277	76	128	170	217	250
(7)	1	-137	6 270	-95 203	75	121	168	197	233
(8)	1	-125	5 196	-73 291	79	130	174	212	254
(9)	1	-119	4 718	-71 741	75	118	158	190	224
(10)	1	-114	4 343	-54 829	76	125	171	200	232
(11)	1	-111	4 100	-49 367	76	119	150	199	246
(12)	1	-97	3 126	-32 603	75	115	161	195	235
(13)	1	-96	3 059	-32 563	75	127	162	192	225
(14)	1	-82	2 237	-20 407	75	112	149	183	218
(15)	2	-489	39 847	-1 084 553	75	134	176	222	267
(16)	2	-372	23 050	-476 027	75	128	174	211	239
(17)	2	-292	14 202	-231 551	76	124	160	206	252
(18)	2	-289	13 917	-221 891	75	124	172	210	247
(19)	2	-281	13 157	-204 487	78	129	169	214	250
(20)	2	-280	13 072	-203 857	76	123	168	204	240
(21)	2	-199	6 595	-79 657	79	125	174	217	257

P. Goetgheluck, Université de Paris-sud

REFERENCES

- 1 Dickson L. E.: History of the theory of numbers, vol. I. Carnegie Inst. Washington, Chelsea, New York 1952.
- 2 Guy R. K.: Reviews in number theory 1973–1983, vol. I. AMS, Providence RI, 1984.
- 3 Karst E.: New quadratic forms with high density of primes. Elem. Math. 28, 116–118 (1973).
- 4 Leveque W. J.: Reviews in number theory 1940–1972, vol. I. AMS, Providence RI, 1974.

A remark on the gamma function

According to Problem 188, Part II of G. Pólya and G. Szegő [2] for each integrable function $f(x)$ on $0 \leq x \leq 1$ we have:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx,$$

or

$$\sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \sim \varphi(n) \int_0^1 f(x) dx \quad (n \rightarrow \infty),$$

where $\varphi(n)$ denotes Euler's totient function.

Let $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ be the Euler gamma function. Then using the above mentioned result for $f(x) = \log \Gamma(x)$ and taking into account that $\int_0^1 \log \Gamma(x) dx = \log \sqrt{2\pi}$ (Raabe's integral; [3]) we obtain

$$\sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^n \log \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) \sim \varphi(n) \log \sqrt{2\pi},$$

or

$$\log P(n) \sim \varphi(n) \log \sqrt{2\pi}, \quad \text{where} \quad P(n) \equiv \prod_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^n \Gamma\left(\frac{k}{n}\right).$$

The aim of this note is to give an explicit formula for $P(n)$ and to establish an asymptotic formula with remainder term for the summatory function of $\log P(n)$.

We shall use the following results:

Lemma 1 ([3]).

$$\prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{\sqrt{n}}, \quad n > 1.$$

Lemma 2. (A. Hurwitz, see Problem 35, Part VIII of [2])

Suppose $\psi(x)$ is an arbitrary function defined for $0 \leq x \leq 1$.

If $f(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^n \psi\left(\frac{k}{n}\right)$ and $g(n) = \sum_{k=1}^n \psi\left(\frac{k}{n}\right)$, then $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$, μ denoting the

Möbius function.

Lemma 3.

If $F(n) = \prod_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^n \psi^*\left(\frac{k}{n}\right)$, $G(n) = \prod_{k=1}^n \psi^*\left(\frac{k}{n}\right)$ and $\psi^*(x) > 0$ for every x , $0 \leq x \leq 1$, then

$$F(n) = \sum_{d|n} [G(d)]^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}.$$

Proof: Apply Lemma 2 for $f = \log F$, $g = \log G$, $\psi = \log \psi^*$.

Theorem 1.

For $n > 1$ we have

$$P(n) = \frac{(2\pi)^{\varphi(n)/2}}{\exp \Lambda(n)/2} = \begin{cases} (2\pi)^{\varphi(n)/2} / \sqrt{p}, & \text{for } n = p^m \\ (2\pi)^{\varphi(n)/2}, & \text{for } n \neq p^m \end{cases}$$

where $\Lambda(n)$ is von Mangoldt's arithmetic function.

Proof: Using Lemma 1 und Lemma 3 one obtains successively:

$$P(n) = \prod_{d|n} \left[\frac{(2\pi)^{(d-1)/2}}{\sqrt{d}} \right]^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)} = (2\pi)^{\frac{1}{2} \sum_{d|n} d\mu\left(\frac{n}{d}\right) - \frac{1}{2} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)} / \sqrt{h(n)},$$

where

$$\sum_{d|n} d\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \varphi(n); \quad \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) = 0 \quad (n > 1); \quad \text{and } h(n) \equiv \prod_{d|n} d^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}.$$

Here

$$\log h(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \log d = \Lambda(n),$$

cf. [1], and the proof is complete.

Lemma 4 (cf. [1]).

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \log x),$$

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) = O(x).$$

Theorem 2.

$$\sum_{n \leq x} \log P(n) = \frac{3 \log 2\pi}{2\pi^2} x^2 + O(x \log x).$$

Proof: By Theorem 1 and Lemma 4:

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \log P(n) &= \sum_{n \leq x} \left[\frac{\varphi(n)}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \Lambda(n) \right] = \\ &= \frac{\log 2\pi}{2} \sum_{n \leq x} \varphi(n) - \frac{1}{2} \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \\ &= \frac{\log 2\pi}{2} \left(\frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \log x) \right) - \frac{1}{2} O(x) = \\ &= \frac{3 \log 2\pi}{2 \pi^2} x^2 + O(x \log x). \end{aligned}$$

The authors wish to thank the referee for valuable suggestions.

J. Sándor, Jud. Harghita, Romania and L. Tóth, Satu Mare, Romania

REFERENCES

- 1 Hardy, G. H. and Wright, E. M.: An introduction to the theory of numbers. Clarendon Press, Oxford 1960.
- 2 Pólya, G. and Szegő, G.: Problems and theorems in analysis. Springer Verlag Berlin, Heidelberg 1972.
- 3 Whittaker, E. T. and Watson, G. N.: A course of modern analysis. Cambridge Univ. Press, 1969.

© 1989 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/89/030073-04\$1.50 + 0.20/0

Kleine Mitteilungen

Zu einer Aufgabe der Kombinatorik

A_p^k ; $p \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei die Anzahl der Möglichkeiten, k (nicht zu unterscheidende) Dinge auf p (zu unterscheidende) Personen aufzuteilen. Das Resultat

$$A_p^k = \binom{p+k-1}{k}; \quad p \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0 \tag{1}$$

wird im allgemeinen durch vollständige Induktion gewonnen, wobei

$$A_p^2 = \binom{p+2-1}{2}, \quad A_p^3 = \binom{p+3-1}{3}$$