

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 44 (1989)
Heft: 3

Artikel: Die Dehnsche Zerlegungsinvariante für hyperbolische Polyederbausteine
Autor: Debrunner, Hans E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-41610>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

REFERENCES

- 1 Fary I.: On straight line representations of planar graphs. Acta Sci. Math. 11, 229–233 (1948).
- 2 Wagner K.: Bemerkungen zum Vierfarbenproblem. Jber Deutsch. Math. Verein. 46, 26–32 (1936).

© 1989 Birkhäuser Verlag, Basel

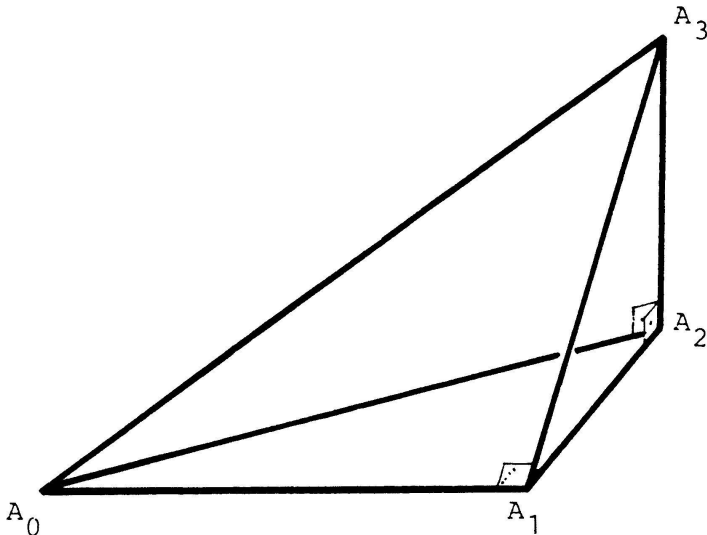
0013-6018/89/030064-03\$1.50 + 0.20/0

Die Dehnsche Zerlegungsinvariante für hyperbolische Polyederbausteine

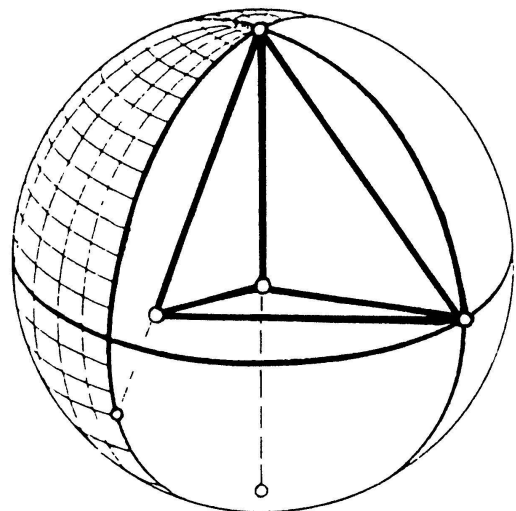
1. Ich versuche hier, eine neue elementare Bestimmung der Dehnschen Invarianten für die als Bausteine hyperbolischer Polyeder dienenden «2-asymptotischen Orthoscheme» zu verbinden mit dem referierenden Vertrautmachen mit der neuerdings von der Wartebank aufs Spielfeld zurückgeholten hyperbolischen Raumgeometrie. Lücken lassen sich, z. T. allerdings nicht ohne eingehende Bemühung des Lesers, anhand des Übersichtsartikels [7] und mit Hilfe der Monographie [2] stopfen.

2. Hauptobjekte dieser Arbeit sind Tetraeder mit drei rechten Diederwinkeln (= Keilwinkeln) längs des Kantenzuges $A_0 A_2 A_1 A_3$ von Ecke zu Ecke, vgl. Fig. 1; gleichwertig kann man fordern, dass die vier Seitendreiecke $A_i A_j A_k$ ($i < j < k$; $i, j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$) bei A_j rechthöckig seien, oder auch – für die Konstruktion am einfachsten –, dass der Kantenzug $A_0 A_1 A_2 A_3$ total orthogonal sei. Eingeführt wurden diese dreidimensionalen Analoga zu den rechthöckigen Dreiecken im hyperbolischen Raum H^3 von Lobatschewskij (er nannte sie Pyramiden, vgl. [6, § 43]) und im sphärischen Raum S^3 , unabhängig, von Schläfli [9], dessen Benennung *Orthoscheme* ich übernehme; eine tragende Rolle spielen sie etwa bei Wythoff (der sie doppelt-rechthöckig nannte) bei seiner Erweiterung [10] der Napierschen Regeln der sphärischen Trigonometrie. Die Bedeutung der Orthoscheme liegt darin, dass sie einerseits eine Polyederklasse mit einem Minimum freier Parameter – etwa der drei nicht schon als rechte festgelegten Diederwinkel – bilden, dass sich aber andererseits (und zwar in der euklidischen, wie auch der sphärischen und hyperbolischen Raumgeometrie) jedes dreidimensionale Polyeder in derartige Orthoscheme zerlegen lässt. Es erweist sich allerdings oft bequemer – und in Dimensionen höher als 4 eventuell sogar als unumgänglich; eine entsprechende Vermutung Hadwigers über die Baukasteneigenschaft d -dimensionaler Orthoscheme ist noch ungeklärt, vgl. [2, p. 196] und [1] – neben Zerlegung auch Ergänzung zuzulassen. Dann wird also ein Polyeder als «algebraische (d. h. vorzeichenbehaftete) Summe» von Orthoschemen dargestellt; auf die Bestimmung des Volumens und jeder anderen bewegungs- und zerlegungsinvarianten Masszahl mit Werten in einer abelschen Gruppe hat diese Erweiterung des Blickwinkels von Zerlegung zu Ergänzungsgleichheit keinen einschränkenden Einfluss.

3. In der hyperbolischen Geometrie empfiehlt es sich vielfach, den Raum H^3 durch Grenzpunkte («im Unendlichen»), deren Gesamtheit ∂H^3 als eine 2-dimensionale Sphäre aufzufassen ist, zum «erweiterten hyperbolischen Raum» \bar{H}^3 zu ergänzen, analog wie der euklidische Raum E^3 durch Punkte «im Unendlichen», die zusammen eine projektive Ebene ausmachen, zum projektiven Raum P^3 erweitert wird. Im *Kleinschen projektiven Modell* der hyperbolischen Geometrie [5, p. 214 ff] stellt sich dann \bar{H}^3 dar als euklidische



Figur 1. Ein Orthoschem $A_0 A_1 A_2 A_3$.

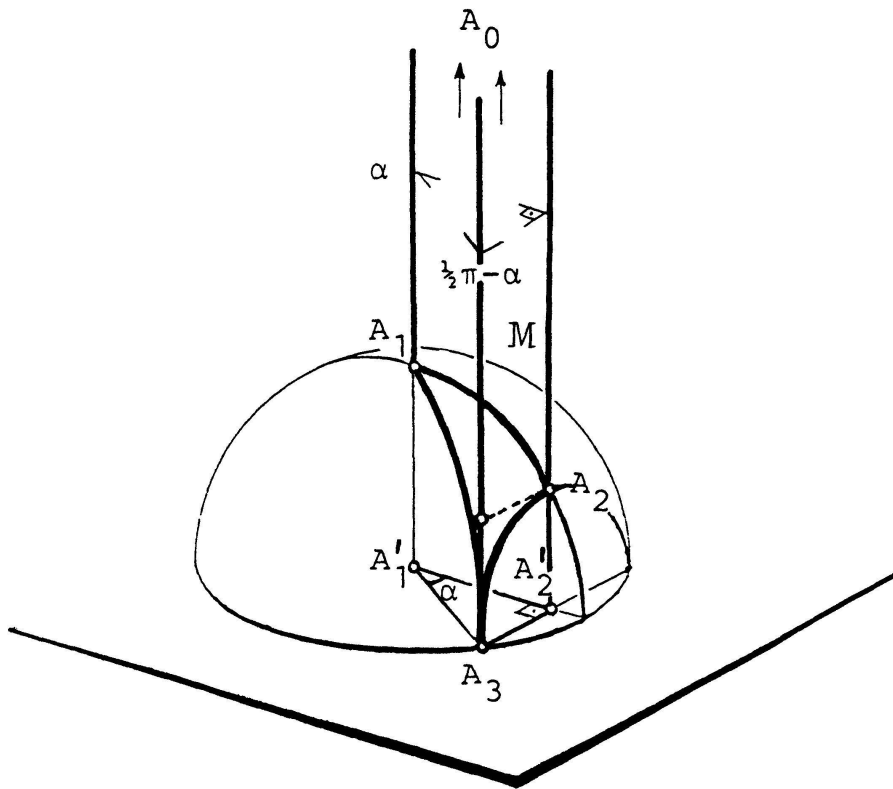


Figur 2. Ein 2-asymptotisches Tetraeder, dargestellt in Kleins projektivem Modell von H^3 .

Einheitskugel in E^3 , mit deren Rand als Sphäre ∂H^3 «im hyperbolisch Unendlichen». Punkte, hyperbolische Geraden und von Ebenen begrenzte Halbräume von \bar{H}^3 (bzw. H^3) erscheinen dann als euklidische Punkte, Sehnen und von Kreisscheiben begrenzte Kugel-segmente in der abgeschlossenen (bzw. offenen) Einheitskugel von E^3 .

Dieses Modell ist zwar kollinearitätstreu, aber weder Längenverhältnisse noch Winkel sind darin anschaulich beurteilbar. Hingegen erzielt man Winkeltreue etwa durch Übergang zu *Poincarés Halbraum-Modell* von H^3 . Dieses besteht aus dem obern Halbraum $\{(x, y, z) \in E^3 \mid z > 0\}$ des euklidischen Raumes, wobei jetzt die Menge ∂H^3 der Grenzpunkte als die Grenzebene $G = \{(x, y, z) \in E^3 \mid z = 0\}$, ergänzt durch einen Punkt (∞) , auftritt. Hyperbolische Geraden bzw. Ebenen zeigen sich dann euklidisch als Halbkreise und Halbgeraden, bzw. Halbsphären und Halbebenen, welche die Grenzebene G orthogonal schneiden. Bequem ist dieses Modell insbesondere, weil sich die hyperbolische Länge einer Kurve (insb. einer Strecke) $t \rightarrow (x(t), y(t), z(t))$ für $a \leq t \leq b$ als $\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} / z \, dt$ ermitteln lässt, analog tritt bei Flächen- oder Volumenberechnungen der euklidische Integralausdruck mit Zusatz eines Nenners z^2 oder z^3 im Integranden auf.

4. Die Menge der hyperbolischen Polyeder in H^3 kann dementsprechend auch erweitert werden durch *asymptotische Polyeder* in \bar{H}^3 ; diese lassen sich als Grenzgebilde gewöhnlicher Polyeder auffassen, wenn einzelne oder mehrere der Ecken ins Unendliche verlegt werden, vgl. Fig. 2. Ein konvexes Polyeder in \bar{H}^3 heisst *j-asymptotisch*, wenn j seiner Ecken auf ∂H^3 liegen. Für ein Orthoschem $A_0 A_1 A_2 A_3$ hat die geforderte Doppelrechtwinkligkeit zur Folge, dass höchstens seine zwei «Hypotenusenendpunkte» A_0 und A_3 auf ∂H^3 liegen können. Für 2-asymptotische Orthoscheme ist nur noch einer der Diederwinkel, etwa derjenige längs der (unendlich langen) Hypotenuse $A_0 A_3$ frei wählbar, und durch diesen sind sie bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt. Bezeichnet man diesen Diederwinkel längs der Hypotenuse mit $\frac{1}{2}\pi - \alpha$, so heisse das betreffende Orthoschem $L(\alpha)$; längs der Kanten $A_0 A_1$ und $A_2 A_3$ wird dann der Diederwinkel α gebildet, die restlichen drei Diederwinkel sind rechte. Durch eine Kongruenzabbildung kann $L(\alpha)$ in



Figur 3. Ein 2-asymptotisches Orthoschem $A_0 A_1 A_2 A_3$, dargestellt in Poincarés Halbraummodell von H^3 .

eine solche Lage gebracht werden, dass es in Poincarés Halbraum-Modell erscheint als Menge M der Punkte, die sowohl vertikal oberhalb eines rechtwinkligen Dreiecks $A'_1 A'_2 A'_3$ in der Grenzebene G , mit euklidischer Länge 1 der Hypotenuse $A'_1 A'_3$ und spitzem Winkel α bei A'_1 , als auch vertikal oberhalb einer euklidischen Einheitskugel mit Zentrum A'_1 liegen, vgl. Figur 3. Die Ecken A_0 bzw. A_3 von $L(\alpha)$ auf ∂H^3 muss man sich dann als die Punkte dieser Menge mit Koordinate $z = \infty$ bzw. $z = 0$ vorstellen, ferner A_1 und A_2 als Durchstosspunkte der Vertikalen durch A'_1 und A'_2 mit der oberen Einheitskugel.

5. Lobatschewskij hat mehrfach gezeigt (z. B. in [6, § 46]), dass sich jedes Tetraeder in H^3 als algebraische Summe von vier asymptotischen Orthoschemen darstellen lässt. Diese Bemerkung wurde von Sah [8] dahin erweitert, dass sich jedes Polyeder in \bar{H}^3 sogar als algebraische Summe endlich vieler 2-asymptotischer Orthoschemen $L(\alpha)$ ($0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$) darstellen lässt (das analoge gilt übrigens in jeder ungeradzahlig Dimension, vgl. [3], und auf Bezug von Vorzeichen, bzw. von Ergänzungsgleichheit lässt sich nicht verzichten). Damit lassen sich alle bewegungs- und zerlegungsinvarianten Masszahlen für Polyeder in \bar{H}^3 (und speziell auch in H^3) als Summe und Differenz derselben Invarianten für verschiedene $L(\alpha)$ ($0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$) darstellen. Insbesondere kann man bei Milnor [7, pp. 17–20] nachlesen, auf wie einfache Weise sich durch Ermitteln des Integrals $\int_M 1/z^3 dx dy dz$ der in äquivalenter Form auch schon von Lobatschewskij berechnete

Volumenwert

$$\text{Vol}(L(\alpha)) = -\frac{1}{2} \int_0^\alpha \log |2 \sin \alpha| d\alpha \tag{1}$$

gewinnen lässt.

5. Ich zeige jetzt, dass sich auf ebenso naheliegende elementare Art die Dehninvariante von $L(\alpha)$ als

$$\Psi(L(\alpha)) = \log |2 \sin \alpha| \otimes \alpha \tag{2}$$

bestimmen lässt. Eine weniger naheliegende, aber auch elementare Berechnung stammt von Dupont und Sah, vgl. [4, p. 169]. Die Dehnsche Invariante, die sich aus den Arbeiten von Dehn, Hadwiger, Sydler und Jessen zur Zerlegungstheorie der Polyeder entwickelt hat, ist für ein konvexes Polyeder $B \subset H^3$ (und genau gleich in E^3 und S^3) durch

$$\Psi(B) = \sum l_K \otimes \alpha_K \tag{3}$$

definiert; die Summe erstreckt sich über alle Kanten K von B , deren Länge wird mit l_K und der längs K gebildete Diederwinkel, reduziert modulo $\frac{1}{2}\pi$, mit α_K bezeichnet. Nebenbei: die Beziehung zwischen der algebraischen Formel (2) und der gleichgebauten analytischen Formel (1), und genau gleich zwischen (3) und Schläflis Differentialformel

$$dV = \frac{1}{2} \sum l d\alpha \tag{4}$$

für das Volumen, ausgedrückt durch Kantenlängen und Variation der entsprechenden Diederwinkel, [9, p. 235], liegt noch vollständig im mathematischen Dunkel. Für asymptotische hyperbolische konvexe Polyeder B (bei denen zwar Kantenlängen, nie aber Volumen unendlich werden) ist die Interpretation von (3) zu modifizieren, z. B. nach Thurston (vgl. [8, Appendix 2]) wie folgt: um alle Eckpunkte A auf ∂H^3 von $B \subset \bar{H}^3$ lege man paarweise disjunkte Horosphären H_A um A derart, dass H_A jede von A auslaufenden Kante von B noch in einem von A verschiedenen Punkt trifft; unter l_K verstehe man dann in (3) die Länge desjenigen Teils von K , der ausserhalb der eventuell um seine Eckpunkte gelegten Horosphären liegt. Weil die Summe der Diederwinkel an den Polytopkanten durch einen unendlich fernen Eckpunkt gleich wie bei dem von der Horosphäre aus B ausgeschnittenen euklidischen Vieleck ein ganzes Vielfaches von π beträgt und weil zwei Horosphären H_A und H'_A um A auf allen Geraden durch A gleichlange Strecken ausschneiden, hängt dann der durch (3) gegebene Wert nicht von der speziellen Wahl der zu legenden Horosphären ab. Horosphären (die als Grenzgebilde in Scharen von metrischen Sphären durch einen festen Punkt, mit Zentren auf einem festen von diesem Punkt ausgehenden Strahl definierbar sind, also gleichsam als metrische Kugelflächen mit Zentrum im Unendlichen, was aber im Unterschied zum euklidischen Analogon nicht zu Ebenen führt) erscheinen im Poincaré-Modell als euklidische Sphären, die die Grenzebene G tangieren, oder auch als euklidische Ebenen $z = u > 0$ parallel zur Grenzebene G . Zum Nachweis von (2) wählen wir als Horosphäre um die Ecke A_3 im obern Halbraum von E^3 die euklidische Sphäre mit Radius $\sin \alpha$ und Zentrum im Abstand $\sin \alpha$ über A_3 . Offensichtlich liegt der Teil von $A_0 A_3$ mit $z \geq 2 \sin \alpha$ ausserhalb dieser Horosphäre, und die Kante $K = A_2 A_3$ hat sogar beide Eckpunkte auf der Horosphäre, so dass von ihr her nur noch die Kantenlänge $l_K = 0$ bei (3) ins Spiel tritt. Als die um den Eckpunkt $A_0 = (\infty)$ von $L(\alpha)$ zu legende Horosphäre wählen wir beispielsweise die Ebene $z = u > 2$. Die in (3) auftretenden Terme sind bis auf zwei je 0; nämlich derjenige zu $K = A_2 A_3$ wegen $l_K = 0$, wie oben erwähnt, und die für $A_0 A_2, A_1 A_2$ und $A_1 A_3$, weil der Diederwinkel $\frac{1}{2}\pi$,

also modulo $\frac{1}{2}\pi$ reduziert = 0, beträgt. Es bleiben die Terme längs $A_0 A_3$ (mit dem Diederwinkel $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ und der Kantenlänge $l = \int_{2 \sin \alpha}^u 1/z \, dz$ zwischen den gelegten Horosphären), und längs $A_0 A_1$ (mit dem Diederwinkel α und der Länge $\int_1^u 1/z \, dz$ ausserhalb der Horosphären). Die elementare Ermittlung der Integrale führt auf

$$\Psi(L(\alpha)) = (\log u - \log |2 \sin \alpha|) \otimes (\frac{\pi}{2} - \alpha) + (\log u) \otimes \alpha,$$

also nach Reduzierung mod $\frac{1}{2}\pi$ und Addition auf

$$\Psi(L(\alpha)) = \log |2 \sin \alpha| \otimes \alpha, \quad \text{w.z.b.w.}$$

Hans E. Debrunner, Math. Institut, Universität Bern

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 Böhm J. und Schwulow H.: Eine Zerlegung von vierdimensionalen euklidischen und nichteuklidischen Simplexen in Orthoscheme. *Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena Math. Natur. Reihe* 31, 545–555 (1982); MR 84 d: 52008.
- 2 Böhm J. und Hertel E.: *Polyedergeometrie in n-dimensionalen Räumen konstanter Krümmung*. Birkhäuser, Basel-Boston-Stuttgart 1981; MR 82 k: 52001 a.
- 3 Debrunner H. E.: *Dissecting orthoschemes into orthoschemes*, im Druck.
- 4 Dupont J. L. and Sah C.-H.: Scissors congruences, II. *J. Pure Appl. Algebra* 25, 159–195 (1982); 30 217 (1983); MR 84 b: 53062 b.
- 5 Hilbert D. und Cohn-Vossen S.: *Anschauliche Geometrie*. Springer, Berlin 1932.
- 6 Lobatschewskij N. I.: *Über die Anfangsgründe der Geometrie*, Kasaner Bote 1830. Übersetzt und kommentiert von F. Engel, Teubner, Leipzig 1898.
- 7 Milnor J. W.: *Hyperbolic Geometry: the first 150 years*. *Bull. Amer. Math. Soc.* 6, 9–24 (1982); MR 82 m: 57005.
- 8 Sah C.-H.: Scissors congruences, I. *The Gauss-Bonnet map*, *Math. Scand* 49, 181–210 (1982); 53, 62 (1983); MR 84 b: 53062 a.
- 9 Schläfli L.: *Theorie der vielfachen Kontinuität*, 1852. In: L. Schläfli, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Band I, 177–392, Birkhäuser, Basel 1950.
- 10 Wythoff W. A.: *The rule of Neper in the four dimensional space*. *K. Akad. Wet. Amsterdam, Proc. Sect. of Sci.* 9, 529–534 (1907).

On cubic polynomials giving many primes

1. Introduction

In the following «prime» means positive or negative prime, that is an integer of the sequence ... -7, -5, -3, -2, 2, 3, 5, 7, 11 ...