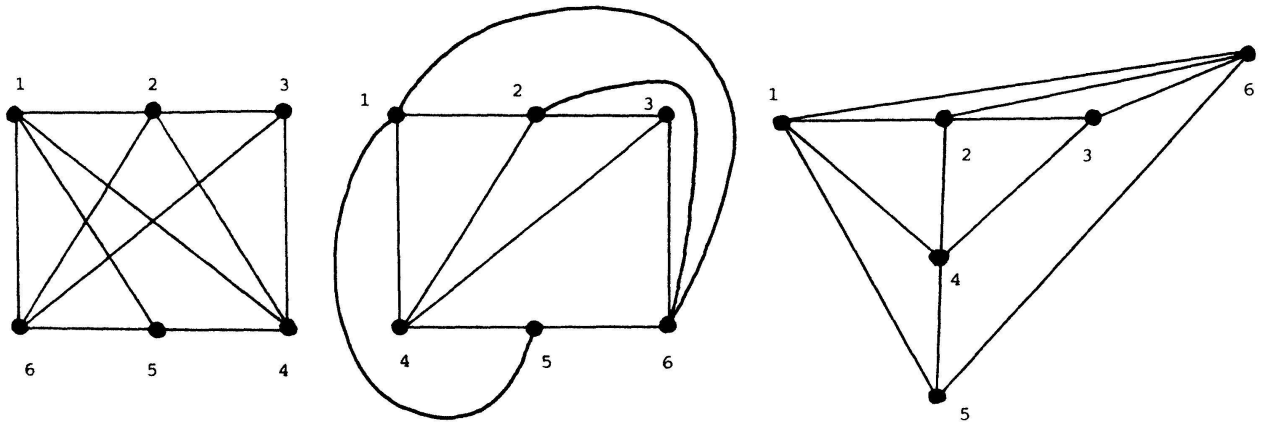
Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 44 (1989)
Heft: 3

Artikel: Straight line representations of planar graphs
Autor: Bryant, V.W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41609

Straight line representations of planar graphs

For the purposes of this article a *graph* is a collection of vertices, some distinct pairs of which are joined by a single edge (i.e. there are no loops or multiple edges). A graph is *planar* if it can be illustrated in the plane with no two of its edges meeting except at a vertex which is an endpoint of them both. Figure 1 (a) shows a graph, 1 (b) shows a planar representation of it, and 1 (c) shows a planar representation in which each edge is a straight line segment.



(a) (b) (c)

Figure 1.

It is a well-known, but still surprising result, proved independently by Wagner in 1936 [2] and Fary in 1948 [1], that *any* planar graph has a planar representation in which the edges are straight line segments.

It will be noted in Figures 1 (b) and 1 (c) that a set of edges forms a boundary of a face in one if and only if the same set of edges in the same order forms a boundary of a face in the other (for example the "cycle" 3456 bounds a face in each). In addition the infinite (or unbounded) face in one remains the infinite face in the other. Two such planar representations will be called *equivalent*. As is common in work on this topic, we shall restrict attention to planar graphs in which each face is bound by a cycle, all other planar graphs being simple combinations of graphs of this type.

We now prove a minor generalisation of the Wagner-Fary result. The generalisation is interesting in its own right but has the great advantage that, by proving a little more than in the original result, we simplify its proof!

Theorem: *Given a planar representation of a graph in which the boundary of each face is a cycle, and given one particular finite face f, there exists an equivalent planar representation in which each edge is represented by a straight line segment and in which the face f forms a convex polygon.*

Proof: The proof is by induction on k, the number of finite faces of the representation. The smallest possible value of k is 1, in which case the graph consists of a single cycle which can trivially be illustrated as a convex polygon, giving the required representation.

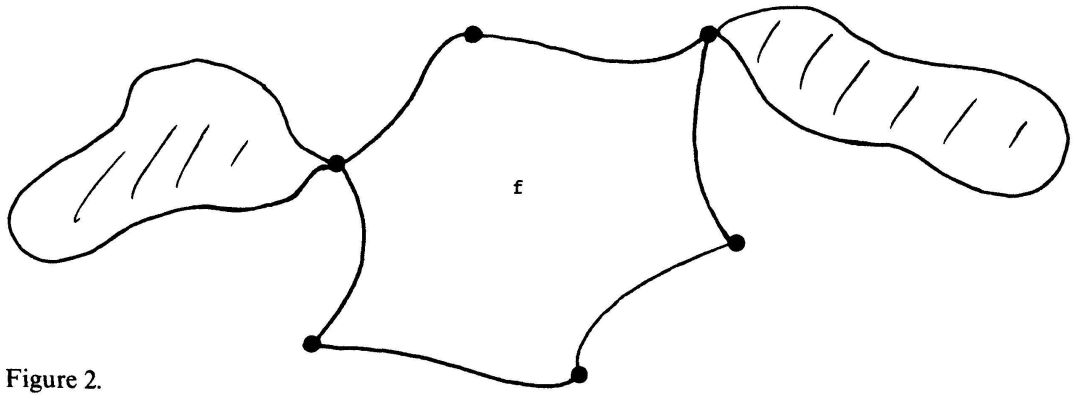
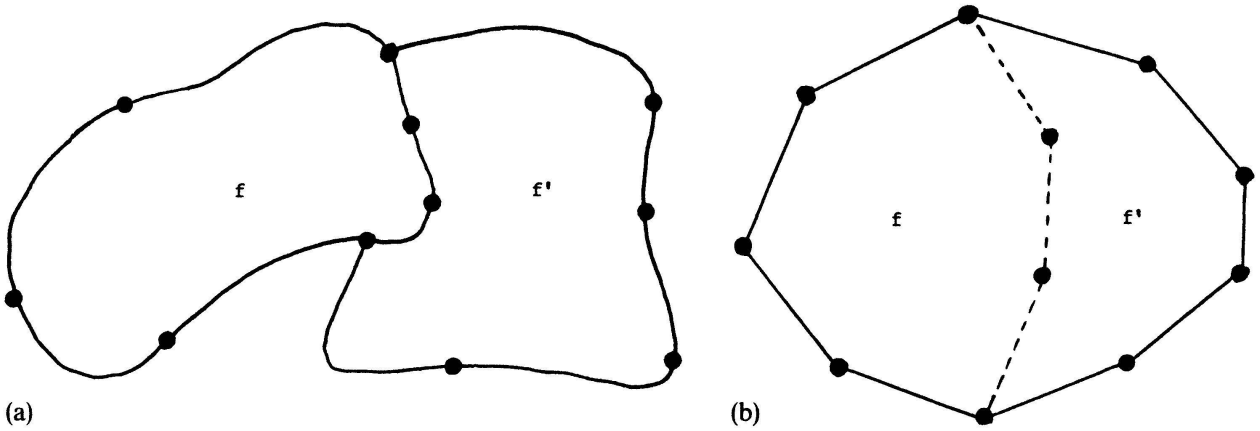


Figure 2.

So assume that $k \geqq 1$ and that the result is known for representations of graphs with k finite faces, and consider a planar representation of a graph with $k + 1$ finite faces, one of which is called f. If each edge bounding f also bounds the infinite face then the representation is as in Figure 2, and clearly this contradicts the fact that the infinite face is bounded by a cycle. Therefore some boundary edge of f bounds another finite face, f' say. If $f \cup f'$ surrounds a region of the plane, then we can re-choose f' in that region to give an f and f' as illustrated in Figure 3(a).



(a) (b)

Figure 3.

If we now remove all the edges on the boundary common to f and f' then we get a planar representation of a graph with only k finite faces, one of which is "$f \cup f'$", to which the induction hypothesis can be applied. This gives an equivalent straight line representation with "$f \cup f'$" convex: clearly the missing edges can be put back in across the face "$f \cup f'$", as in Figure 3(b), to give the required straight line representation of the original graph with f convex.
That completes the proof by induction. □

I gave that result and proof in a course in graph theory some years ago. I am indebted to Douglas Woodall for reminding me of it and encouraging me to publish it.

V. W. Bryant
Department of Pure Mathematics
Sheffield University

REFERENCES

1 Fary I.: On straight line representations of planar graphs. Acta Sci. Math. *11*, 229–233 (1948).
2 Wagner K.: Bemerkungen zum Vierfarbenproblem. Jber Deutsch. Math. Verein. *46*, 26–32 (1936).

 0013-6018/89/030064-03$1.50+0.20/0

Die Dehnsche Zerlegungsinvariante für hyperbolische Polyederbausteine

1. Ich versuche hier, eine neue elementare Bestimmung der Dehnschen Invarianten für die als Bausteine hyperbolischer Polyeder dienenden «2-asymptotischen Orthoscheme» zu verbinden mit dem referierenden Vertrautmachen mit der neuerdings von der Wartebank aufs Spielfeld zurückgeholten hyperbolischen Raumgeometrie. Lücken lassen sich, z.T. allerdings nicht ohne eingehende Bemühung des Lesers, anhand des Übersichtsartikels [7] und mit Hilfe der Monographie [2] stopfen.

2. Hauptobjekte dieser Arbeit sind Tetraeder mit drei rechten Diederwinkeln (= Keilwinkeln) längs des Kantenzuges $A_0 A_2 A_1 A_3$ von Ecke zu Ecke, vgl. Fig. 1; gleichwertig kann man fordern, dass die vier Seitendreiecke $A_i A_j A_k$ ($i<j<k$; $i,j,k \in \{0,1,2,3\}$) bei A_j rechwinklig seien, oder auch – für die Konstruktion am einfachsten –, dass der Kantenzug $A_0 A_1 A_2 A_3$ total orthogonal sei. Eingeführt wurden diese dreidimensionalen Analoga zu den rechwinkligen Dreiecken im hyperbolischen Raum H^3 von Lobatschefskij (er nannte sie Pyramiden, vgl. [6, § 43]) und im sphärischen Raum S^3, unabhängig, von Schläfli [9], dessen Benennung *Orthoscheme* ich übernehme; eine tragende Rolle spielen sie etwa bei Wythoff (der sie doppelt-rechwinklig nannte) bei seiner Erweiterung [10] der Napierschen Regeln der sphärischen Trigonometrie. Die Bedeutung der Orthoscheme liegt darin, dass sie einerseits eine Polyederklasse mit einem Minimum freier Parameter – etwa der drei nicht schon als rechte festgelegten Diederwinkel – bilden, dass sich aber andererseits (und zwar in der euklidischen, wie auch der sphärischen und hyperbolischen Raumgeometrie) jedes dreidimensionale Polyeder in derartige Orthoscheme zerlegen lässt. Es erweist sich alledings oft bequemer – und in Dimensionen höher als 4 eventuell sogar als unumgänglich; eine entsprechende Vermutung Hadwigers über die Baukasteneigenschaft d-dimensionaler Orthoscheme ist noch ungeklärt, vgl. [2, p. 196] und [1] – neben Zerlegung auch Ergänzung zuzulassen. Dann wird also ein Polyeder als «algebraische (d.h. vorzeichenbehaftete) Summe» von Orthoschemen dargestellt; auf die Bestimmung des Volumens und jeder anderen bewegungs- und zerlegungsinvarianten Masszahl mit Werten in einer abelschen Gruppe hat diese Erweiterung des Blickwinkels von Zerlegungs- zu Ergänzungsgleichheit keinen einschränkenden Einfluss.

3. In der hyperbolischen Geometrie empfiehlt es sich vielfach, den Raum H^3 durch Grenzpunkte («im Unendlichen»), deren Gesamtheit ∂H^3 als eine 2-dimensionale Sphäre aufzufassen ist, zum «erweiterten hyperbolischen Raum» $\bar{H}^3$ zu ergänzen, analog wie der euklidische Raum E^3 durch Punkte «im Unendlichen», die zusammen eine projektive Ebene ausmachen, zum projektiven Raum P^3 erweitert wird. Im *Kleinschen projektiven Modell* der hyperbolischen Geometrie [5, p. 214 ff] stellt sich dann $\bar{H}^3$ dar als euklidische