Zuschriften an die Redaktion aus dem Leserkreis

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **44 (1989)**

Heft 2

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Zuschriften an die Redaktion aus dem Leserkreis

Zum Beitrag von H. Walser in El. Math. Vol. 43/6, p. 161–169
Ein Schliessungssatz aus der Elementargeometrie

In einer Zuschrift macht Herr G. Weiss (Institut für Geometrie, TH Wien) darauf aufmerksam, dass der mitgeteilte Schliessungssatz bereits von F. Hohenberg bearbeitet und veröffentlicht worden ist [1]. F. Hohenberg hat auch noch weitere Sätze über geschlossene gleichseitige Polygone aus dem Umfeld dieses Schliessungssatzes mitgeteilt [2, 3].

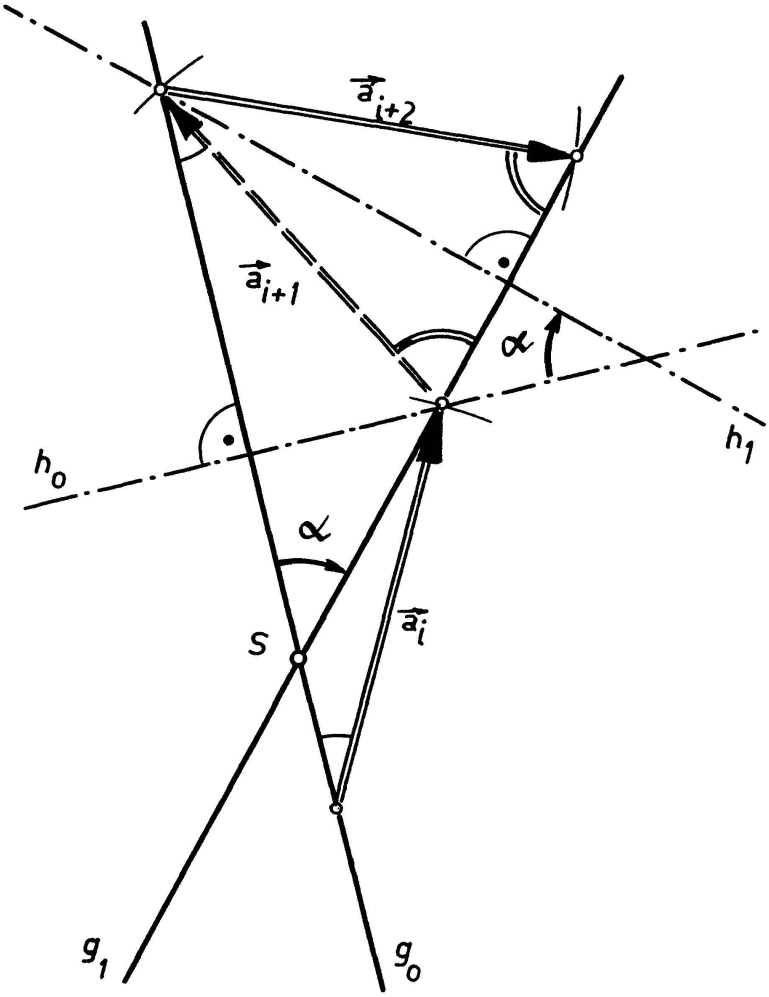
[1] Hohenberg F.: Gleichseitige Polygone, deren Ecken abwechselnd auf zwei Geraden liegen. Sitzungsberichte der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch naturwissenschaftliche Klasse, Abteilung II, 188. Band, 8.–10. Heft, 1979, S. 385–405.

[2] Hohenberg F.: Geschlossene gleichseitige Polygone, deren Ecken abwechselnd einem Kreis und einer Geraden angehören. Sitzungsberichte der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch naturwissenschaftliche Klasse, Abteilung II, 188. Band, 4.–7. Heft, 1979, S. 143–156.

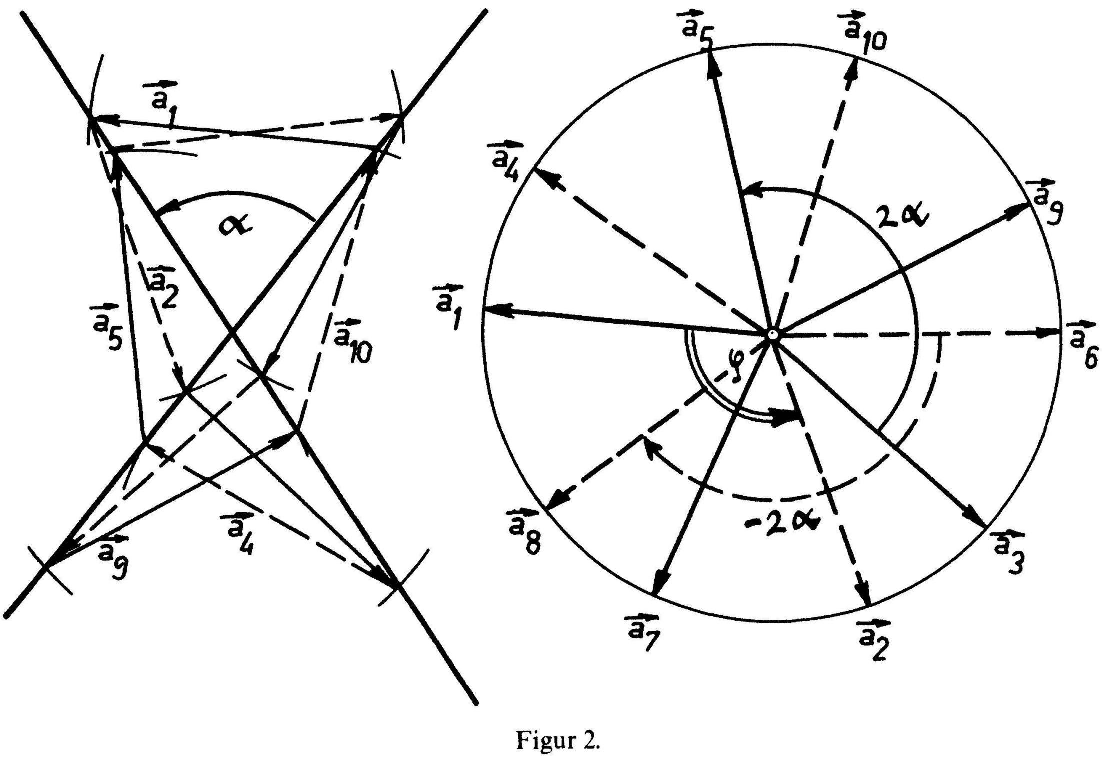
[3] Hohenberg F.: Besondere gleichseitige Zwölfecke, die sich aus einem Schliessungssatz ergeben. Sitzungsberichte der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch naturwissenschaftliche Klasse, Abteilung II, 188. Band, 4.–7. Heft, 1979, S. 157–166.

Dieser Hinweis tut unseres Erachtens der Note von H. Walser keinen Abbruch. Während F. Hohenberg seinen Satz über geschlossene gleichseitige Polygone mit recht aufwendigen Betrachtungen erhält (es werden dabei allerdings auch noch einige zusätzliche Einsichten freigelegt), zeigt H. Walser einen spiegelungsgeometrischen Zugang auf, der sich ganz auf dem Felde der Elementargeometrie bewegt.
In einem Brief zur gleichen Note teilt R. Wyss (Oberrealschule Solothurn) eine Möglichkeit mit, den Beweis von H. Walser weiter zu elementarisieren und damit den Schliessungssatz für den Geometrie-Unterricht auf dem Gymnasium zu erschliessen. Die Überlegungen von R. Wyss seien in ungekürzter Form an die Leser weitergegeben.

In El. Math. Vol. 43, Nr. 6, S. 161–169 veröffentlichte Hans Walser einen Satz etwa folgenden Inhalts: Trägt man mit dem Zirkel abwechslungsweise eine feste Streckenlänge a auf zwei sich schneidenden Geraden ab, so kehrt man (nach endlich vielen Schritten) genau dann zum Ausgangspunkt zurück, wenn der Geradenschnittwinkel ein rationaler Teil von π ist.
Dieser reizvolle Satz erlaubt einen recht einfachen Beweis, der den Grund der Schliessung sofort erkennen lässt. Die Konstruktion zeigt nämlich, dass ein Vektor $\vec{a}_i$ ($i \in \mathbb{N}, |\vec{a}_i| = a$) durch eine Drehung – als Zusammensetzung zweier Spiegelungen an den zu g_0, g_1 orthogonalen Geraden h_0, h_1 – um den doppelten Schnittwinkel 2α der gegebenen Geraden in den übernächsten Vektor $\vec{a}_{i+2}$ übergeht (Fig. 1).
Somit drehen sich die zugehörigen (von einem festgedachten Punkt ausgehenden) Ortsvektoren mit geradzahligem Index stets um den Winkel 2α und diejenigen mit ungeradzahligem Index um -2α (Fig. 2). Die beiden Vektorpolygonzüge $\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_5, \ldots$ bzw. $\vec{a}_2, \vec{a}_4, \vec{a}_6, \ldots$ schliessen sich also einzeln genau dann, wenn je ein regelmässiger Stern mit (Kräfte-)Summen $\vec{a}_1 + \vec{a}_3 + \ldots = \vec{0}$ bzw. $\vec{a}_2 + \vec{a}_4 + \ldots = \vec{0}$ entsteht. Dies ist bei $\alpha = \frac{p}{q}\pi$ ($p, q \in \mathbb{N}$, teilerfremd) wegen $2\alpha s = 2\left(\frac{p}{q}\pi\right)s = 2\pi\left(p \cdot \frac{s}{q}\right)$ bei je genau $s = q$ Summanden der Fall. Die gesamte Figur schliesst sich also nach genau $2q$ Schritten oder falls bei der Konstruktion der Schnittpunkt S getroffen wird, schon nach q Schritten, da hier die beiden Sterne zusammenfallen ($\varphi = 0$). Der Winkel φ der Verdrehung der beiden Vektorsterne gegeneinander hängt vom Startpunkt und der gewählten Zirkelöffnung a ab und ist für das Schliessen der Figur ohne weitere Bedeutung.



Figur 1.



Figur 2.

Der vorgestellte Schliessungssatz lässt sich also dahingehend verschärfen, dass sich bei $\alpha = \frac{p}{q} \cdot \pi$ schon die einzelnen Polygonzüge $\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_5, \ldots$ bzw. $\vec{a}_2, \vec{a}_4, \vec{a}_6, \ldots$ nach insgesamt genau $2q$ Schritten schliessen, was aber in der Konstruktionsfigur nicht direkt sichtbar wird.

Zum Beitrag von J. Sandor in El. Math. Vol. 43/6, p. 177–180 Some integral inequalities

Herr A. Pfluger (ETH-Zürich) lässt uns dazu folgende Bemerkung zukommen.

Die Ungleichung (2) kam mir auf den ersten Blick etwas merkwürdig vor, wurde mir aber nach Vergegenwärtigen des geometrischen Sachverhaltes völlig klar. Statt der völlig unmotivierten $\sqrt{ab}$ will ich dies mit einem beliebigen Zwischenpunkt c erklären. Es sei also $0 < a < c < b$, und es seien A, C und B die entsprechenden Punkte auf der die Funktion f darstellenden konvexen Kurve K. Konvex ist gleichbedeutend mit «sublinear», d.h. für irgend zwei Punkte der Kurve K verläuft diese unterhalb der Verbindungsstrecke. Geht also K durch die Punkte A, C und B, so verläuft sie unterhalb der Strecken von A nach C und von C nach B oder fällt mit der einen oder mit beiden zusammen. Deshalb ist die Fläche $\int_a^b f(x)\, dx$ nicht grösser als die Summe der beiden Trapeze mit den Ecken a, c, C, A bzw. c, b, B, C und Gleichheit kann dann und nur dann eintreten, wenn die Kurve K aus den beiden Strecken von A nach C und von C nach B besteht.

Etwas anders ist die Situation bei Ungleichung (1). Hier wird Konvexität in dieser Form benützt: Durch jeden Punkt der Kurve gibt es eine Gerade (z.B. die Tangente bei Differenzierbarkeit), die im Sinne von $\leqq$ unterhalb der Kurve verläuft. Bei gegebenem Punkt $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ verläuft also K oberhalb einer gewissen Geraden $y - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = m\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$ und die Ungleichung (1) folgt sofort. Darin gilt das Gleichheitszeichen für alle linearen Funktionen $l(x) = p + qx$, bei denen $l\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ist. Gibt man sich aber anstelle von $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ einen anderen Kurvenpunkt $(c, f(c))$, $a < c < b$ und $c \neq \frac{a+b}{2}$, so hat die linke Seite von (1) keine untere Grenze.

Diese Bemerkung soll zeigen, dass geometrische Betrachtungsweise zur Gewinnung von Einsicht sehr von Nutzen sein kann.

Die Redaktion