Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 44 (1989)
Heft: 1

Rubrik: Aufgaben

LITERATUR

1 Alzer H.: Über einen Wert, der zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel zweier Zahlen liegt. El. Math. *40*, 22–24 (1985).
2 Alzer H.: Ungleichungen für $(e/a)^a\,(b/e)^b$. El. Math. *40*, 120–123 (1985).
3 Euler R.: Problem 1178. Math. Mag. *56*, 326 (1983).
4 Klein B. G.: Solution I of 1178. Math. Mag. *57*, 302 (1984).
5 Seiffert H.-J.: Solution II of 1178. Math. Mag. *57*, 302 (1984).
6 Seiffert H.-J.: Werte zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel zweier Zahlen. El. Math. *42*, 105–107 (1987).
7 Stolarsky K. B.: Generalizations of the logarithmic mean. Math. Mag. *48*, 87–92 (1975).
8 Stolarsky K. B.: The power and generalized means. Am. Math. Monthly *87*, 545–548 (1980).
9 Bemerkung zur kleinen Mitteilung von H. Alzer. E. Math. *41*, 41 (1986).

 0013-6018/89/010016-03 $1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 977. Let $p_m(x)$ denote the characteristic polynomial of the (m, m) top left submatrix of an $(n+1,\, n+1)$ irreducible tridiagonal matrix $A=(a_{ij})$. Let $p_{n+1}(x)$ have $n+1$ distinct real zeros $\xi_0, \ldots, \xi_n$. Put

$$D_k := \begin{vmatrix} p_k(\xi_k) & p_k(\xi_{k+1}) & \cdots & p_k(\xi_n) \\ p_{k+1}(\xi_k) & p_{k+1}(\xi_{k+1}) & \cdots & p_{k+1}(\xi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_n(\xi_k) & p_n(\xi_{k+1}) & \cdots & p_n(\xi_n) \end{vmatrix}.$$

Prove $D_k \neq 0$ $(0 \leqq k \leqq n)$.

Remark: The problem arose in a study of a fluid reservoir regulated by a general birth-death process.

E. A. van Doorn, A. A. Jagers, Enschede, NL

Solution by the proposer. Let $N = n - k$. Define $p_0(x) = 1$. Then the familiar recurrence relation

$$p_m(x) = (a_{mm} - x)\, p_{m-1}(x) - a_{m,m-1}\, a_{m-1,m}\, p_{m-2}(x) \tag{*}$$

is valid for all m with $2 \leqq m \leqq n+1$. Hence, if two consecutive polynomials $p_{m-1}(x)$ and $p_m(x)$ have a zero t in common, then $p_j(t) = 0$ for all j, since $a_{s,s-1}\, a_{s-1,s} \neq 0$ by definition of irreducibility. However, this contradicts the definition of $p_0(x)$. It follows that $p_{m-1}(x)$ and $p_m(x)$ have distinct zeros. In particular, since $p_n(\xi_n) = p_{n+1}(\xi_n)$ we must have

$p_n(\xi_n) \neq 0$, which settles the case $N = 0$. We proceed by induction on N. Let

$$\sum_{j=k}^{n} \alpha_j p_i(\xi_j) = 0; \qquad k \leqq i \leqq n$$

represent a linear relation between the columns of D_k. Then by using (*) we also have

$$\sum_{j=k}^{n} \alpha_j \xi_j p_i(\xi_j) = 0; \qquad k+1 \leqq i \leqq n$$

and hence

$$\sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j (\xi_j - \xi_k) p_i(\xi_j) = 0; \qquad k+1 \leqq i \leqq n.$$

This is a linear relation between the columns of D_{k+1}, and so $\alpha_j = 0$ for $k+1 \leqq j \leqq n$ by a suitable hypothesis and the fact that the zeros ξ_i of $p_{n+1}(x)$ are distinct. Finally $\alpha_k = 0$ as well (and hence $D_k \neq 0$, its columns being linearly independent) since otherwise ξ_k would be a common zero of $p_i(x)$ for all $i \geqq k$, a case excluded earlier.

Aufgabe 978. Es seien n und q natürliche Zahlen und $a_1, \ldots, a_{n+q}$ positive reelle Zahlen. Man zeige:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k\right)^n \left(\frac{1}{q} \sum_{k=n+1}^{n+q} a_k\right)^q \leqq \left(\frac{1}{n+q} \sum_{k=1}^{n+q} a_k\right)^{n+q}$$

Wann genau gilt das Gleichheitszeichen?

H. Alzer, Waldbröl, BRD

Lösung. Wir setzen $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = A$ und $\frac{1}{q} \sum_{k=n+1}^{n+q} a_k = B$. Mit der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel ergibt sich die Behauptung $(A^n \cdot B^q)^{1/(n+q)} \leqq \frac{n \cdot A + q \cdot B}{n+q}$, wobei das Gleichheitszeichen genau für $A = B$ gilt.

H. Kummer, Burgdorf

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bolligen), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), F. Götze (Jena, DDR), W. Janous (Innsbruck, A), O. Kuropatwa (Poppenhausen, BRD), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), V. Mascioni (Origlio), K. Schütte (München, BRD), H.-J. Seiffert (Berlin (W)), P. Streckeisen (Zürich), A. Voigt (Karlsruhe, BRD), M. Vowe (Therwil), P. Weisenhorn (Achern, BRD).

Aufgabe 979. Man zeige, dass

$$\frac{8(\pi - x)x}{\pi^2(\pi - 2x)} < \tan x < \frac{\pi^2 x}{\pi^2 - 4x^2} \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi/2.$$

V. D. Mascioni, Origlio

Lösung. Für $0 \leqq x \leqq \pi/2$ sei

$$f(x) := \pi^2 x \cdot \cos x - (\pi^2 - 4x^2) \cdot \sin x.$$

Dann hat man

$$f'(x) = 4x^2 \cdot \cos x - (\pi^2 - 8)\, x \cdot \sin x.$$

Für $x \in (0, \pi/2)$ folgt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $(\tan x)/x = 4/(\pi^2 - 8)$ ist. Da $(\tan x)/x$ für $x \in (0, \pi/2)$ streng monoton wachsend ist, im Intervall $(0, \pi/2)$ jeden Wert >1 annimmt und $4/(\pi^2 - 8) > 1$ ist, folgt hieraus, dass es genau ein $x_0 \in (0, \pi/2)$ mit $f'(x_0) = 0$ gibt. Da $f'(\pi/2)$ negativ ist, kann $f(x_0)$ nur das Maximum der Funktion f sein. Daher nimmt die Funktion f im Intervall $[0, \pi/2]$ ihr Minimum nur am Rand dieses Intervalles an. Aufgrund von $f(0) = f(\pi/2) = 0$ folgt $f(x) > 0$ für alle $x \in (0, \pi/2)$. Hiermit ergibt sich die Abschätzung

$$\tan x < \frac{\pi^2 x}{\pi^2 - 4x^2} \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi/2.$$

Ersetzt man hier x durch $\pi/2 - x$, so erhält man den linken Teil der behaupteten Doppelungleichung.

K. Schütte, München, BRD.

Anmerkung der Redaktion: W. Janous und M. Vowe bemerken, dass der Beweis der zur linken Ungleichung der Aufgabe äquivalenten Ungleichung $4x/\pi^2 > (1/x) - \cot x$ in [1] zu finden ist. Für die rechte Ungleichung verweist H.-J. Seiffert auf [2].

LITERATURVERZEICHNIS

1 Mascioni V. D.: Zur Abschätzung des Brocardschen Winkels II. El. Math. *42*, 40 (1987).
2 Becker M. and Stark E. L.: On a hierarchy of polynomial inequalities for $\tan x$. Univ. Beograd Publ. Elektrotechn. Fak. Ser. Mat. Fiz., No. 620, pp. 133–138 (1978).

Weitere Lösungen sandten P. Bracken (Toronto, CD), E. Braune (Linz, A; Teillösung), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), H.-J. Seiffert (Berlin (W)), Hj. Stocker, (Wädenswil), A. Voigt (Karlsruhe, BRD), M. Vowe (Therwil), K. Warneke (Vechta, BRD), P. Weisenhorn (Achern, BRD), H. Widmer (Rieden).

Aufgabe 980. Berechnet man die beiden Integrale

$$I_2 = \int_0^\pi \cos^2 x\,dx \quad \text{und} \quad I_4 = \int_0^\pi \cos^4 x\,dx$$

mit der Simpsonregel, wobei man das Intervall $[0, \pi]$ in mehr als zwei bzw. in mehr als vier Teilintervalle unterteilt, so erhält man die exakten Werte. Ist dies Zufall oder kann man verallgemeinern?

M. Vowe, Therwil

Lösung: Vowe's Beobachtung beruht nicht auf Zufall, sondern auf folgendem Satz:

Wendet man auf $f(x) = \cos^{2s} x$ in $[0, \pi]$ das Simpson-Verfahren mit $2m + 1$ Stützstellen an, so ist der Simpson-Wert für alle $m > s$ der exakte Wert des Integrals $\int_0^\pi \cos^{2s} x\,dx$.

Beweis: $h = \dfrac{\pi}{2m}$ ist die Schrittweite; $S(h)$ bezeichne den Simpson-Wert. Dann ist

$$\frac{6m}{\pi} S(h) = 2 \sum_{j=1}^{m} \cos^{2s}(2jh) + 4 \sum_{j=1}^{m} \cos^{2s}(2jh - h).$$

Für $d = \cos h + i \cdot \sin h$ gelten $d\bar{d} = 1$, $d^{4m} = 1$, $d^j \neq 1\ (j < 4m)$.
Damit wird

$$\begin{aligned}
\frac{2^{2s} \cdot 3m}{\pi} S(h) &= \sum_{j=1}^{m} (d^{2j} + \bar{d}^{2j})^{2s} + 2 \sum_{j=1}^{m} (d^{2j-1} + \bar{d}^{2j-1})^{2s} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{2s} \binom{2s}{k} d^{4j(k-s)} + 2 \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{2s} \binom{2s}{k} d^{2(s-k)} d^{4j(k-s)} \\
&= \sum_{k=0}^{2s} \binom{2s}{k} (1 + 2d^{2(s-k)}) \sum_{j=1}^{m} d^{4j(k-s)}.
\end{aligned}$$

$k = s$ ergibt den Beitrag $3m\dbinom{2s}{s}$ zu dieser Summe. Für alle übrigen k gilt wegen $s < m$ $d^{4(k-s)} \neq 1$ und damit

$$\sum_{j=1}^{m} d^{4(k-s)j} = d^{4(k-s)} \frac{d^{4m(k-s)} - 1}{d^{4(k-s)} - 1} = 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{2^{2s} \cdot 3m}{\pi} S(h) = 3m \binom{2s}{s}$$

und schliesslich

$$S(h) = \frac{\pi}{2^{2s}}\binom{2s}{s} = \frac{(2s-1)\,(2s-3)\ldots 3\cdot 1}{2s(2s-2)\ldots 4\cdot 2}\,\pi = \int_0^\pi \cos^{2s} x\,dx.$$

J. Binz, Bolligen

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), F. Götze (Jena, DDR), W. Janous (Innsbruck, A), P. Weisenhorn (Achern, BRD).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. August 1989* and *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 1001. Mit den Catalan-Zahlen

$$C(i) = \frac{1}{i+1}\binom{2i}{i}$$

und den Stirling-Zahlen zweiter Art

$$S(k,i) = \frac{1}{i!}\sum_{s=0}^{i}(-1)^s\binom{i}{s}(i-s)^k$$

bilde man die Zahlen

$$A(k) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^i 4^{-1}\, i!\; C(i)\, S(k,i).$$

Man beweise $A(2n) = 0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$.

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 1002. Für nicht negative ganzzahlige m, n beweise man die folgende Identität:

$$\sum_{k=0}^{\min(m,n)} \binom{m}{k}\binom{m+n-k}{m} x^k = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \binom{m}{k}\binom{n}{k}(1+x)^k$$

U. Graf, La Neuveville

Aufgabe 1003. Für $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ bezeichne $\langle x, y\rangle = \sum x_i y_i$ das gewöhnliche Skalarprodukt und $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ die Euklidische Norm. Man zeige, dass

$$\frac{|x|+|y|}{2}\cdot\frac{\langle x,y\rangle}{|x||y|} \leqq \int_0^1 |(1-t)\,x+t\,y|\,dt \leqq \frac{|x|+|y|}{2}.$$

H.-J. Seiffert, Berlin (W)

Aufgabe 1004. Für beliebige $n\in\mathbb{N}$ beweise man

$$\prod_{k=0}^{n-1}(\sqrt{n}+\sqrt{k}) < e^n (n!)^{1/2}.$$

V. Mascioni, Origlio

Literaturüberschau

H. Loeffel: Blaise Pascal, 1623–1662. Vita Mathematica, Band 2. 176 Seiten, 84 Abbildungen, Fr. 40.–. Birkhäuser, Basel, Boston 1987.

Blaise Pascal war nicht nur ein schöpferischer Mathematiker und Physiker, sondern zugleich einer der bedeutendsten religiösen Denker des neuzeitlichen Frankreichs. Seine „Lettres à un Provincial“ sind ein Glanzstück französischer Prosa und seine zur Weltliteratur gehörenden „Pensées sur la religion“ werden noch heute von Philosophen und Psychologen gleichermassen geschätzt. Es ist daher sehr zu begrüssen, dass dem deutschsprachigen Leser nun im Rahmen der Vita Mathematica auch eine neue deutschsprachige Pascal-Biographie zur Verfügung steht.

Das grosszügig illustrierte und äusserst ansprechend gestaltete Werk gliedert sich in insgesamt 11 Kapitel und behandelt nach einer biographischen Einleitung die verschiedenen Gebiete, in denen Pascal wissenschaftlich tätig war: Projektive Geometrie, Rechenmaschine, arithmetisches Dreieck, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Infinitesimalrechnung, Wissenschaftstheorie und Physik. Für jedes dieser Gebiete entwickelt der Verfasser kurz die Vorgeschichte, wobei er oftmals bis ins Altertum zurückgeht, und illustriert alsdann Pascals Verdienste detailliert anhand eines exemplarisch ausgewählten Quellentextes.

Selbstverständlich finden sich bei einem derart breitangelegten Werk stets auch einige kleinere Unstimmigkeiten. So behauptet der Verfasser im zweiten Kapitel (S. 31) zum Beispiel, dass Apollonios „erstmals die oben genannten Kurven [Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel] als ebene Schnitte eines Kreiskegels erklärt“. Diese Aussage ist jedoch dahingehend zu präzisieren, dass Apollonios diese Kegelschnitte als erster an einem *einzigen* Kegel ableitete, während seine Vorgänger die drei Arten von Kegelschnitten je nur aus einer Art von Rotationskegel (spitzwinklig, rechtwinklig, stumpfwinklig) erhielten, und zwar indem dieser mit einer Ebene senkrecht zu einer Erzeugenden geschnitten wurde. Eine weitere unklare Formulierung findet sich auf der nachfolgenden Seite 34, wo der „Brouillon project“ von Desargues einerseits bis heute nicht nachweisbar sein soll (S. 34, Z. 27 ff.) und andererseits