Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 43 (1988)
Heft: 6

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Aufgaben

Aufgabe 973. D, E, F seien die Ecken eines dem Dreieck ABC einbeschriebenen Dreiecks, wobei $D \in BC$, $E \in CA$, $F \in AB$. Die Inhalte der Dreiecke DEF, AEF, BFD, CDE seien mit S, S_1, S_2, S_3 bezeichnet. Nach P. Erdös und H. Debrunner gilt dann

$$S \geqq \min(S_1, S_2, S_3).$$

Man beweise oder widerlege folgende mögliche Verschärfungen dieser Ungleichung:

a) $S \geqq H(S_1, S_2, S_3)$ b) $S \geqq G(S_1, S_2, S_3)$.

Dabei bezeichnen H das harmonische, G das geometrische Mittel.

D. P. Mavlo, Moskau, UdSSR

LITERATURVERZEICHNIS

1 Aufgabe 260: El. Math. *11*, 20 (1956).
2 Bottema O. et al.: Geometric inequalities, Groningen 1969, p. 80.

Lösung. Nehmen wir an, dass das Dreieck ABC den Inhalt 1 hat, und dass $BD = \lambda \cdot BC$, $CE = \mu \cdot CA$ und $AF = \nu \cdot AB$ $(0 < \lambda, \mu, \nu < 1)$.

a) Wir berechnen $3S/H - 3$:

$$\begin{aligned} 3S/H - 3 &= S\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right) - 3 \\ &= (1 - S_1 - S_2 - S_3)\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right) - 3 \\ &= \frac{1 - S_2 - S_3}{S_1} + \frac{1 - S_3 - S_1}{S_2} + \frac{1 - S_1 - S_2}{S_3} - 6. \end{aligned}$$

Nun ist $\dfrac{1 - S_2 - S_3}{S_1} = \dfrac{1 - (1-\nu)\lambda - \mu(1-\lambda)}{(1-\mu)\nu} = \dfrac{1-\lambda}{\nu} + \dfrac{\lambda}{1-\mu}$, usw.

Also hat man

$$\begin{aligned} 3S/H - 3 &= \left(\frac{1-\lambda}{\nu} - 2 + \frac{\nu}{1-\lambda}\right) + \left(\frac{1-\mu}{\lambda} - 2 + \frac{\lambda}{1-\mu}\right) + \left(\frac{1-\nu}{\mu} - 2 + \frac{\mu}{1-\nu}\right) \\ &= \frac{(1-\lambda-\nu)^2}{(1-\lambda)\nu} + \frac{(1-\mu-\lambda)^2}{(1-\mu)\lambda} + \frac{(1-\nu-\mu)^2}{(1-\nu)\mu} \geqq 0 \end{aligned}$$

mit Gleichheit genau, wenn $\lambda = \mu = \nu = \frac{1}{2}$.
Hiermit ist a) bewiesen.

b) Wir berechnen $S^3 - G^3$:

$$S^3 - G^3 = \{(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu) + \lambda\mu\nu\}^3 - (1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu)\lambda\mu\nu,$$

und dieser Ausdruck ist negativ, wenn man $(\lambda, \mu, \nu) = (\frac{1}{2} - p, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + p)$ wählt für irgendein p, $0 < p < \frac{1}{2}$.
Also ist b) widerlegt.

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten W. Janous (Innsbruck, A), Tsen-Pao Shen (München, BRD), Hj. Stocker (Wädenswil), H. Widmer (Rieden).

Aufgabe 974. Es bezeichne $g(r, n, k)$ die maximale Anzahl von r-dimensionalen Gebieten, in die der r-dimensionale Raum durch n Büschel zu je k parallelen $(r-1)$-dimensionalen Hyperebenen zerlegt wird. Man bestimme $g(r, n, k)$.

J. Binz, Bolligen

Lösung. Wir behaupten, dass $g(r, n, k) = \sum_{t=0}^{r} \binom{r}{t} k^t$.
Offenbar ist die Formel richtig für $r = 1$ (n und k beliebig) und für $n = 1$ (r und k beliebig), das heisst $g(1, n, k) = 1 + nk$, $g(r, 1, k) = 1 + k$.
Der Beweis erfolgt bei festem k durch Induktion bzgl. r und n: Es seien $g(r, n-1, k)$ und $g(r-1, n-1, k)$ bereits bestimmt, und wir haben eine Konfiguration von $(n-1)$ Büscheln im r-dimensionalen Raum, die $g(r, n-1, k)$ Teilgebiete realisiert.
In jeder der neu anzubringenden k Hyperebenen vom letzten Büschel wird von dieser Konfiguration eine Zerlegung in höchstens $g(r-1, n-1, k)$ $(r-1)$ dimensionale Teilgebiete ausgeschnitten, das heisst, jede neuangebrachte Hyperebene vermehrt durch Abspaltung die Anzahl der Teilgebiete um $g(r-1, n-1, k)$ oder weniger. Folglich gilt

$$g(r, n, k) \leqq g(r, n-1, k) + k\, g(r-1, n-1, k).$$

Gleichheit wird erreicht, wenn die n Normalen so gewählt werden, dass jedes r-Tupel von ihnen linear unabhängig ist und die neu anzubringenden k Hyperebenen keinen Punkt gemeinsam haben mit der konvexen Hülle aller beschränkten Teilgebiete der Anfangskonfiguration.
Da diese Situation immer realisiert werden kann, haben wir

$$g(r, n, k) = g(r, n-1, k) + k\, g(r-1, n-1, k),$$

woraus unsere Behauptung unmittelbar folgt.

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Aufgabe 975. Man ermittle die Anzahl $t(m, n)$ aller Polynome n-ten Grades in einer Unbestimmten mit teilerfremden Koeffizienten aus $\mathbb{N}_m := \{1, 2, \ldots, m\}$.

R. Wyss, Flumenthal

Lösung. $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ sei die Menge der Primzahlen in $\mathbb{N}_m$.
$\left[\frac{m}{p_i}\right]$ Zahlen aus $\mathbb{N}_m$ enthalten zumindest den Primfaktor p_i, $\left[\frac{m}{p_i p_j}\right]$ zumindest die Primfaktoren p_i und p_j, usw. Inklusion-Exklusion ergibt jetzt für die Polynome $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}_m^{n+1}$

$$t(m,n) = m^{n+1} - \sum_{p_i \in \mathbb{P}} \left[\frac{m}{p_i}\right]^{n+1} + \sum_{p_i, p_j \in \mathbb{P}} \left[\frac{m}{p_i p_j}\right]^{n+1} - + \ldots$$

zulässige Möglichkeiten.
Das Ergebnis lässt sich mit Hilfe der Moebius-Funktion schöner schreiben:

$$t(m,n) = \sum_{i=1}^{m} \mu(i) \left[\frac{m}{i}\right]^{n+1}.$$

J. Binz, Bolligen

Eine weitere Lösung sandte W. Janous (Innsbruck, A).

Aufgabe 976. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $k(n)$ den maximalen quadratfreien Teiler (quadratfreien Kern) von n. Ferner sei

$$\alpha := \prod_{p \text{ prim}} \left(1 - \frac{1}{p(p+1)}\right).$$

Man beweise

$$\sum_{n \leq x} k(n/k(n)) = (3\alpha/\pi^2)\, x \ln x + O(x).$$

A. Bege, Cluj, Rumänien

Lösung. Setzt man $h(n) := k(n/k(n))$ und $H(n) := \sum_{d|n} \mu(d)\, h(n/d)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei μ die Möbius-Funktion bedeutet, so gilt nach der Möbiusschen Umkehrformel

$$\sum_{n \leq x} h(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} H(d) = \sum_{d \leq x} H(d)[x/d]. \tag{1}$$

Mit k sind auch die zahlentheoretischen Funktionen h und H multiplikativ, so daß zur weiteren Umformung von (1) die Werte von H für Potenzen von Primzahlen p zu berechnen sind. Da $h(p^j)$ gleich 1 bzw. p ist, falls $j = 0, 1$ bzw. $j \geq 2$, hat $H(p^j)$ die Werte 1 bzw. $p - 1$ bzw. 0 für $j = 0$ bzw. $j = 2$ bzw. $j \in \{1, 3, 4, \ldots\}$. Damit gilt $H(d) \neq 0$ genau dann, wenn d Quadrat einer quadratfreien natürlichen Zahl ist, und (1) lässt sich zu

$$\sum_{n \leq x} h(n) = \sum_{m \leq \sqrt{x}} \mu(m)^2 H(m^2)[x/m^2] = x \sum_{m \leq \sqrt{x}} \frac{\mu(m)^2}{m^2} \prod_{p|m} (p-1) - R(x) \tag{2}$$

umformen. Dabei hat man für das «Restglied» $R(x)$ unter Beachtung der vorher festgestellten Ungleichungen $1 \leq H(m^2) \leq m$ für quadratfreie $m \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$0 \leq R(x) \leq \sum_{m \leq \sqrt{x}} m = \tfrac{1}{2}[\sqrt{x}]([\sqrt{x}] + 1) \leq x, \tag{3}$$

falls nur $x \geq 1$ gilt.
Bezeichnet nun φ die Eulersche Phifunktion, so leitet man aus der bekannten Asymptotik (vgl. etwa [1], S. 289)

$$\sum_{m \leq y} \mu(m)^2 \varphi(m) = 3\alpha\pi^{-2} y^2 + O(y^{3/2}),$$

α wie in der Aufgabenstellung, mittels partieller Summation die asymptotische Formel

$$\sum_{m \leq y} \frac{\mu(m)^2}{m^2} \varphi(m) = 6\alpha\pi^{-2} \int_1^y t^{-1}\, dt + O(1) = 6\alpha\pi^{-2} \log y + O(1) \tag{4}$$

her. Beachtet man jetzt $\prod_{p \mid m} (p-1) = \varphi(m)$ für quadratfreie $m \in \mathbb{N}$, so ist wegen (4) die Summe im «Hauptterm» rechts in (2) gleich $3\alpha\pi^{-2} \log x + O(1)$ und man erhält aus (2) und (3) die behauptete Asymptotik.

P. Bundschuh, Köln, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

1 McCarthy P. J.: Introduction to Arithmetical Functions. Springer, New York et al. (1986).

Weitere Lösungen sandten Kee-wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Juni 1989* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 997. Let $r, s, t > 1$ be integers $\equiv 1 \bmod 3$ and let

$$3a = st + t + 1, \quad 3b = tr + r + 1, \quad 3c = rs + s + 1.$$

Prove or disprove that

$$N := \frac{(r\,s\,t)!}{(r!)^a (s!)^b (t!)^c}$$

must be an integer.

M. S. Klamkin, Alberta, CD

Aufgabe 998. Für reelle $a, b > 0$ mit $a \neq b$ sei

$$F(a,b) := \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{1/(b-a)}.$$

Man zeige: Aus $0 < a < b$, $0 < s < t$ und $c > 0$ folgt

$$\frac{F(b+t,c)}{F(b+s,c)} < \frac{F(a+t,c)}{F(a+s,c)}.$$

H. Alzer, Waldbröl, BRD

Aufgabe 999. Die Zahlenfolge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ genüge der Rekursionsformel

$$f(n) = \frac{b+1-f(n-1)}{b-f(n-1)} \quad (n \geqq 2)$$

mit konstantem $b \in \mathbb{R}$. Zeige: Zu jeder natürlichen Zahl $m \geqq 2$ und beliebig gegebenem Startwert $f(1)$ lässt sich ein b so finden, dass $f(n)$ periodisch mit der Periodenlänge m wird.

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 1000. Man gebe die Lösung der Rekursionsgleichung

$$\sum_{j=0}^{\left[\frac{q+1}{2}\right]} (-1)^j \binom{q-j+1}{j} \alpha_{q-j} = 0, \quad q > 0 \tag{1}$$

mit $\alpha_1 = 1$ in geschlossener Form an.

A. Müller, Zürich