Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 43 (1988)
Heft: 6

Artikel: On Fermat's last theorem
Autor: Choudhry, Ajai
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40816

Mit dem Cosinussatz erhält man $(AP)^2 = (2 + \mu)^2 + 1 + 2(2 + \mu)\cos\varphi$ und $(BP)^2 = (2 - \mu)^2 + 1 - 2(2 - \mu)\cos\varphi$; also ist (2) äquivalent zu

$$W_\mu(\cos) = (AP)^2(BP)^2 = R\cos^2\varphi + S\cos\varphi + T \leq 25 \tag{3}$$

$$\text{mit } R = -4(4 - \mu^2),\ S = 4\mu(\mu^2 - 3),\ T = (4 - \mu^2)^2 + 2\mu^2 + 9.$$

Für $\mu = 2$ wird $W_2(\cos\varphi) = 8\cos\varphi + 17$ und (3) gilt offensichtlich. Es sei nun $0 \leq \mu < 2$. Aufgrund der elementaren Theorie der quadratischen Gleichungen weiss man, dass

$$W_\mu(\cos\varphi) \leq W(\xi) \text{ gilt, wobei } \xi = \max\left(1, -\frac{S}{2R}\right) \text{ ist. Demnach gelten}$$

$$W_\mu(\cos\varphi) \leq W_\mu\left(-\frac{S}{2R}\right) = 25 + \frac{\mu^2(4\mu^2 - 15)}{4 - \mu^2} \text{ für } -\frac{\mu}{2}\frac{3 - \mu^2}{4 - \mu^2} < 1 \text{ und}$$

$$W_\mu(\cos\varphi) \leq W_\mu(1) = (3 + \mu)^2(\mu - 1)^2 \text{ für } -\frac{\mu}{2}\frac{3 - \mu^2}{4 - \mu^2} \geq 1.$$

Da in beiden Fällen die rechtsstehenden Ausdrücke den Wert 25 nicht übertreffen können, ist (2) bewiesen.
Der Beweis hat die «extremalen» Paare (z_1, z_2) der Ungleichung (1) mitgeliefert, nämlich $(1, 1)$, $(1, -1)$ und $(-1, 1)$.

N. Danikas, Fachbereich Mathematik, Aristoteles Universität
Thessaloniki, Griechenland

 0013-6018/88/060180-03$1.50+0.20/0

On Fermat's Last Theorem

In this note we shall prove the following theorem which pertains to Fermat's Last Theorem.

Theorem: *Let $x^n + y^n = z^n$ where x, y, z and n are positive integers such that $x < y < z$ and $n \geq 2$, then*

$$z < x^{1 + \frac{1}{n-1}}. \tag{1}$$

Proof: As $z > y$, we have $z \geq y + 1$, and so

$$x^n + y^n = z^n \geq (y+1)^n$$

or,

$$x^n \geq (y+1)^n - y^n,$$

whence

$$x^n > n\,y^{n-1}$$

which gives

$$y < \frac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}}\, x^{1+\frac{1}{n-1}}. \tag{2}$$

Also $z^n = x^n + y^n < 2\,y^n$.
Using (2), we have

$$z < 2^{\frac{1}{n}} \frac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}}\, x^{1+\frac{1}{n-1}}$$

or,

$$z < \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n(n-1)}} x^{1+\frac{1}{n-1}}.$$

As $n \geq 2$, this gives

$$z < x^{1+\frac{1}{n-1}}. \tag{3}$$

The result is stronger than the inequality $x^2 > 2z+1$ proved by Białek for $n \geq 3$.

Ajai Choudhry, Embassy of India, Warsaw

REFERENCE

1 Białek K.: On some inequalities connected with Fermat's equation. El. Math. *43*, 78–83 (1988).

0013-6018/88/060182-02$1.50+0.20/0