

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 43 (1988)  
**Heft:** 6

**Artikel:** On Fermat's last theorem  
**Autor:** Choudhry, Ajai  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-40816>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

**Download PDF:** 23.05.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Mit dem Cosinussatz erhält man  $(AP)^2 = (2 + \mu)^2 + 1 + 2(2 + \mu)\cos\varphi$  und  $(BP)^2 = (2 - \mu)^2 + 1 - 2(2 - \mu)\cos\varphi$ ; also ist (2) äquivalent zu

$$W_\mu(\cos\varphi) = (AP)^2(BP)^2 = R\cos^2\varphi + S\cos\varphi + T \leq 25 \quad (3)$$

$$\text{mit } R = -4(4 - \mu^2), S = 4\mu(\mu^2 - 3), T = (4 - \mu^2)^2 + 2\mu^2 + 9.$$

Für  $\mu = 2$  wird  $W_2(\cos\varphi) = 8\cos\varphi + 17$  und (3) gilt offensichtlich. Es sei nun  $0 \leq \mu < 2$ . Aufgrund der elementaren Theorie der quadratischen Gleichungen weiss man, dass

$$W_\mu(\cos\varphi) \leq W(\xi) \text{ gilt, wobei } \xi = \max\left(1, -\frac{S}{2R}\right) \text{ ist. Demnach gelten}$$

$$W_\mu(\cos\varphi) \leq W_\mu\left(-\frac{S}{2R}\right) = 25 + \frac{\mu^2(4\mu^2 - 15)}{4 - \mu^2} \text{ für } -\frac{\mu}{2} \frac{3 - \mu^2}{4 - \mu^2} < 1 \text{ und}$$

$$W_\mu(\cos\varphi) \leq W_\mu(1) = (3 + \mu)^2(\mu - 1)^2 \text{ für } -\frac{\mu}{2} \frac{3 - \mu^2}{4 - \mu^2} \geq 1.$$

Da in beiden Fällen die rechtsstehenden Ausdrücke den Wert 25 nicht übertreffen können, ist (2) bewiesen.

Der Beweis hat die «extremalen» Paare  $(z_1, z_2)$  der Ungleichung (1) mitgeliefert, nämlich  $(1, 1), (1, -1)$  und  $(-1, 1)$ .

N. Danikas, Fachbereich Mathematik, Aristoteles Universität  
Thessaloniki, Griechenland

## On Fermat's Last Theorem

In this note we shall prove the following theorem which pertains to Fermat's Last Theorem.

**Theorem:** *Let  $x^n + y^n = z^n$  where  $x, y, z$  and  $n$  are positive integers such that  $x < y < z$  and  $n \geq 2$ , then*

$$z < x^{1 + \frac{1}{n-1}}. \quad (1)$$

**Proof:** As  $z > y$ , we have  $z \geq y + 1$ , and so

$$x^n + y^n = z^n \geq (y + 1)^n$$

or,

$$x^n \geq (y+1)^n - y^n,$$

whence

$$x^n > n y^{n-1}$$

which gives

$$y < \frac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}} x^{1 + \frac{1}{n-1}}. \quad (2)$$

Also  $z^n = x^n + y^n < 2 y^n$ .

Using (2), we have

$$z < 2^{\frac{1}{n}} \frac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}} x^{1 + \frac{1}{n-1}}$$

or,

$$z < \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n(n-1)}} x^{1 + \frac{1}{n-1}}.$$

As  $n \geq 2$ , this gives

$$z < x^{1 + \frac{1}{n-1}}. \quad (3)$$

The result is stronger than the inequality  $x^2 > 2z+1$  proved by Bialek for  $n \geq 3$ .

Ajai Choudhry, Embassy of India, Warsaw

#### REFERENCE

- 1 Bialek K.: On some inequalities connected with Fermat's equation. El. Math. 43, 78–83 (1988).