Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **43 (1988)**

Heft 6

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

6) In order to arrive to a better refinement, we can consider the relation (3) for $f(t) = 1/t$, $k = 2 (0 < a < b)$. It results $L(a, b) < \frac{3}{8}(a + b)^3/(a^2 + ab + b^2)$. Letting $a = \sqrt[3]{x}, b = \sqrt[3]{y}$, this is just one of the Lin [3] and Rüthing [8] inequalities:

$$L(x, y) < \left(\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{2}\right)^3 \tag{12}$$

The author wishes to thank the referee for his valuable suggestions.

Joseph Sándor,
Jud. Harghita, Romania

REFERENCES

1 Beckenbach E. F.: Convex functions. Bull. Amer. Math. Soc. *54*, 439–460 (1948).
2 Carlson B. C.: Some inequalities for hypergeometric functions. Proc. Amer. Math. Soc. *17*, 32–39 (1966).
3 Lin T. P.: The power mean and the logarithmic mean. Amer. Math. Monthly *81*, 879–883 (1974).
4 Love E. R.: Some logarithm inequalities. Math. Gaz. *64*, 55–57 (1980).
5 Lupaş A.: Problem 12739. Gaz. Mat. (Bucureşti), Number 2, 1973.
6 Ostle B. and Terwilliger H. L.: A comparison of two means. Proc. Montana Acad. Sci. *17*, 69–70 (1957).
7 Pólya G. and Szegö G.: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, vol. I, Ch. 4, Springer 1924.
8 Rüthing D.: Eine allgemeine logarithmische Ungleichung. El. Math. *41*, 14–16 (1986).
9 Sándor J.: On Hadamard's inequality (Hungarian). Mat. Lapok (Cluj) *87*, 427–430 (1982).

© 1988 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/88/060177-04$1.50+0.20/0

Kleine Mitteilungen

Eine komplexe Ungleichung aus elementarer Sicht

Aus der Operatorentheorie ist folgende Ungleichung bekannt:

Für $f(z_1, z_2) = 1 + 2(z_1 + z_2) + (z_1 - z_2)^2$ mit $z_1, z_2 \in C$ und $|z_1| = |z_2| = 1$ gilt

$$|f(z_1, z_2)| \leq 5. \tag{1}$$

Man kann (1) mit Hilfe der Ableitungen beweisen, indem man $z_1 = \exp(i\varphi_1)$, $z_2 = \exp(i\varphi_2)$ setzt und dann die Paare φ_1, φ_2 sucht, für die

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_1}|f(z_1, z_2)|^2 = \frac{\partial}{\partial \varphi_2}|f(z_1, z_2)|^2 = 0$$

gilt. Dieser Beweis führt aber zu langen trigonometrischen Rechnungen. Deshalb wollen wir hier einen synthetischen Beweis ohne Benutzung partieller Ableitungen geben.
Setzt man $p_a(z) = 1 + 2(z + a) + (z - a)^2$ für ein $a = \exp(i\vartheta)$, so ist nachzuweisen, dass $\max_{|z|=1} |p_a(z)| = 5$ ist. Wegen $|p_a(z)| = |p_{\bar{a}}(\bar{z})|$ kann man $0 \leq \vartheta \leq \pi$ voraussetzen. Für die Nullstellen z_1, z_2 des Polynoms $p_a(z)$ verifiziert man

$$z_1 = \exp(i\vartheta) - 1 + 2\exp\left(i\frac{\pi + \vartheta}{2}\right),$$

$$z_2 = \exp(i\vartheta) - 1 - 2\exp\left(i\frac{\pi + \vartheta}{2}\right);$$

dabei lässt sich für ein $\varrho \in [0, 2]$ $\exp(i\vartheta) - 1 = \varrho\exp\left(i\frac{\pi + \vartheta}{2}\right)$ schreiben. Somit bekommt man

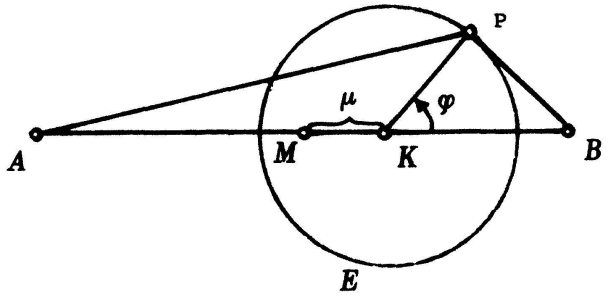
$$z_1 = (\varrho + 2)\exp\left(i\frac{\pi + \vartheta}{2}\right),$$

$$z_2 = (\varrho - 2)\exp\left(i\frac{\pi + \vartheta}{2}\right);$$

die Punkte z_1, z_2 liegen also auf der Geraden $z = \lambda\exp\left(i\frac{\pi + \vartheta}{2}\right)$, $\lambda \in R$, und zwar so, dass der Nullpunkt mit einem der Punkte zusammenfällt oder zwischen ihnen liegt. Es gelten $|z_1 - z_2| = 4$ und $|p_a(z)| = |z - z_1||z - z_2|$.
Um unsere Ungleichung zu beweisen, können wir einfach das folgende elementargeometrische Problem lösen:

> Gegeben seien eine Strecke AB der Länge 4 und ein Kreis E mit Zentrum K auf AB und Radius 1. Zu zeigen ist, dass für alle Punkte P auf E
>
> $$(AP)(BP) \leq 5 \tag{2}$$
>
> gilt.

Es bezeichnen M den Mittelpunkt von AB, μ die Länge (MK) und φ den Winkel zwischen KB und KP (siehe Figur). Aus Symmetriegründen können wir uns auf den Fall $0 \leq \mu \leq 2$ beschränken.



Mit dem Cosinussatz erhält man $(AP)^2 = (2+\mu)^2 + 1 + 2(2+\mu)\cos\varphi$ und $(BP)^2 = (2-\mu)^2 + 1 - 2(2-\mu)\cos\varphi$; also ist (2) äquivalent zu

$$W_\mu(\cos) = (AP)^2(BP)^2 = R\cos^2\varphi + S\cos\varphi + T \leq 25 \tag{3}$$

mit $R = -4(4-\mu^2)$, $S = 4\mu(\mu^2-3)$, $T = (4-\mu^2)^2 + 2\mu^2 + 9$.

Für $\mu = 2$ wird $W_2(\cos\varphi) = 8\cos\varphi + 17$ und (3) gilt offensichtlich. Es sei nun $0 \leq \mu < 2$. Aufgrund der elementaren Theorie der quadratischen Gleichungen weiss man, dass

$W_\mu(\cos\varphi) \leq W(\xi)$ gilt, wobei $\xi = \max\left(1, -\frac{S}{2R}\right)$ ist. Demnach gelten

$$W_\mu(\cos\varphi) \leq W_\mu\left(-\frac{S}{2R}\right) = 25 + \frac{\mu^2(4\mu^2-15)}{4-\mu^2} \text{ für } -\frac{\mu}{2}\frac{3-\mu^2}{4-\mu^2} < 1 \text{ und}$$

$$W_\mu(\cos\varphi) \leq W_\mu(1) = (3+\mu)^2(\mu-1)^2 \text{ für } -\frac{\mu}{2}\frac{3-\mu^2}{4-\mu^2} \geq 1.$$

Da in beiden Fällen die rechtsstehenden Ausdrücke den Wert 25 nicht übertreffen können, ist (2) bewiesen.
Der Beweis hat die «extremalen» Paare (z_1, z_2) der Ungleichung (1) mitgeliefert, nämlich $(1,1)$, $(1,-1)$ und $(-1,1)$.

N. Danikas, Fachbereich Mathematik, Aristoteles Universität
Thessaloniki, Griechenland

© 1988 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/88/060180-03$1.50+0.20/0

On Fermat's Last Theorem

In this note we shall prove the following theorem which pertains to Fermat's Last Theorem.

Theorem: *Let $x^n + y^n = z^n$ where x, y, z and n are positive integers such that $x<y<z$ and $n \geq 2$, then*

$$z < x^{1+\frac{1}{n-1}}. \tag{1}$$

Proof: As $z > y$, we have $z \geq y+1$, and so

$$x^n + y^n = z^n \geq (y+1)^n$$