

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 43 (1988)  
**Heft:** 6

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

6) In order to arrive to a better refinement, we can consider the relation (3) for  $f(t) = 1/t$ ,  $k = 2$  ( $0 < a < b$ ). It results  $L(a, b) < \frac{3}{8}(a + b)^3/(a^2 + ab + b^2)$ . Letting  $a = \sqrt[3]{x}$ ,  $b = \sqrt[3]{y}$ , this is just one of the Lin [3] and R uthing [8] inequalities:

$$L(x, y) < \left( \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{2} \right)^3 \quad (12)$$

The author wishes to thank the referee for his valuable suggestions.

Joseph S ndor,  
Jud. Harghita, Romania

#### REFERENCES

- 1 Beckenbach E. F.: Convex functions. Bull. Amer. Math. Soc. 54, 439–460 (1948).
- 2 Carlson B. C.: Some inequalities for hypergeometric functions. Proc. Amer. Math. Soc. 17, 32–39 (1966).
- 3 Lin T. P.: The power mean and the logarithmic mean. Amer. Math. Monthly 81, 879–883 (1974).
- 4 Love E. R.: Some logarithm inequalities. Math. Gaz. 64, 55–57 (1980).
- 5 Lupaş A.: Problem 12739. Gaz. Mat. (Bucureşti), Number 2, 1973.
- 6 Ostle B. and Terwilliger H. L.: A comparison of two means. Proc. Montana Acad. Sci. 17, 69–70 (1957).
- 7 P lya G. and Szeg  G.: Aufgaben und Lehrs tze aus der Analysis, vol. I, Ch. 4, Springer 1924.
- 8 R uthing D.: Eine allgemeine logarithmische Ungleichung. El. Math. 41, 14–16 (1986).
- 9 S ndor J.: On Hadamard's inequality (Hungarian). Mat. Lapok (Cluj) 87, 427–430 (1982).

## Kleine Mitteilungen

### Eine komplexe Ungleichung aus elementarer Sicht

Aus der Operatorentheorie ist folgende Ungleichung bekannt:

F r  $f(z_1, z_2) = 1 + 2(z_1 + z_2) + (z_1 - z_2)^2$  mit  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  und  $|z_1| = |z_2| = 1$  gilt

$$|f(z_1, z_2)| \leq 5. \quad (1)$$

Man kann (1) mit Hilfe der Ableitungen beweisen, indem man  $z_1 = \exp(i\varphi_1)$ ,  $z_2 = \exp(i\varphi_2)$  setzt und dann die Paare  $\varphi_1, \varphi_2$  sucht, f r die

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_1} |f(z_1, z_2)|^2 = \frac{\partial}{\partial \varphi_2} |f(z_1, z_2)|^2 = 0$$

gilt. Dieser Beweis führt aber zu langen trigonometrischen Rechnungen. Deshalb wollen wir hier einen synthetischen Beweis ohne Benutzung partieller Ableitungen geben.

Setzt man  $p_a(z) = 1 + 2(z + a) + (z - a)^2$  für ein  $a = \exp(i\vartheta)$ , so ist nachzuweisen, dass  $\max_{|z|=1} |p_a(z)| = 5$  ist. Wegen  $|p_a(z)| = |p_{\bar{a}}(\bar{z})|$  kann man  $0 \leq \vartheta \leq \pi$  voraussetzen. Für die

Nullstellen  $z_1, z_2$  des Polynoms  $p_a(z)$  verifiziert man

$$z_1 = \exp(i\vartheta) - 1 + 2 \exp\left(i \frac{\pi + \vartheta}{2}\right),$$

$$z_2 = \exp(i\vartheta) - 1 - 2 \exp\left(i \frac{\pi + \vartheta}{2}\right);$$

dabei lässt sich für ein  $\varrho \in [0, 2]$   $\exp(i\vartheta) - 1 = \varrho \exp\left(i \frac{\pi + \vartheta}{2}\right)$  schreiben. Somit bekommt man

$$z_1 = (\varrho + 2) \exp\left(i \frac{\pi + \vartheta}{2}\right),$$

$$z_2 = (\varrho - 2) \exp\left(i \frac{\pi + \vartheta}{2}\right);$$

die Punkte  $z_1, z_2$  liegen also auf der Geraden  $z = \lambda \exp\left(i \frac{\pi + \vartheta}{2}\right)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , und zwar so, dass

der Nullpunkt mit einem der Punkte zusammenfällt oder zwischen ihnen liegt. Es gelten  $|z_1 - z_2| = 4$  und  $|p_a(z)| = |z - z_1||z - z_2|$ .

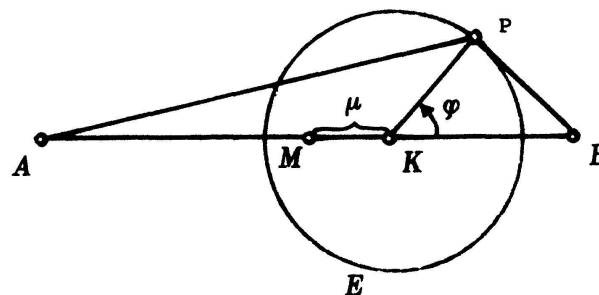
Um unsere Ungleichung zu beweisen, können wir einfach das folgende elementargeometrische Problem lösen:

Gegeben seien eine Strecke  $AB$  der Länge 4 und ein Kreis  $E$  mit Zentrum  $K$  auf  $AB$  und Radius 1. Zu zeigen ist, dass für alle Punkte  $P$  auf  $E$

$$(AP)(BP) \leq 5 \tag{2}$$

gilt.

Es bezeichnen  $M$  den Mittelpunkt von  $AB$ ,  $\mu$  die Länge  $(MK)$  und  $\varphi$  den Winkel zwischen  $KB$  und  $KP$  (siehe Figur). Aus Symmetriegründen können wir uns auf den Fall  $0 \leq \mu \leq 2$  beschränken.



Mit dem Cosinussatz erhält man  $(AP)^2 = (2 + \mu)^2 + 1 + 2(2 + \mu) \cos \varphi$  und  $(BP)^2 = (2 - \mu)^2 + 1 - 2(2 - \mu) \cos \varphi$ ; also ist (2) äquivalent zu

$$W_\mu(\cos \varphi) = (AP)^2 (BP)^2 = R \cos^2 \varphi + S \cos \varphi + T \leq 25 \quad (3)$$

$$\text{mit } R = -4(4 - \mu^2), S = 4\mu(\mu^2 - 3), T = (4 - \mu^2)^2 + 2\mu^2 + 9.$$

Für  $\mu = 2$  wird  $W_2(\cos \varphi) = 8 \cos \varphi + 17$  und (3) gilt offensichtlich. Es sei nun  $0 \leq \mu < 2$ . Aufgrund der elementaren Theorie der quadratischen Gleichungen weiss man, dass

$W_\mu(\cos \varphi) \leq W(\xi)$  gilt, wobei  $\xi = \max\left(1, -\frac{S}{2R}\right)$  ist. Demnach gelten

$$W_\mu(\cos \varphi) \leq W_\mu\left(-\frac{S}{2R}\right) = 25 + \frac{\mu^2(4\mu^2 - 15)}{4 - \mu^2} \text{ für } -\frac{\mu(3 - \mu^2)}{2(4 - \mu^2)} < 1 \text{ und}$$

$$W_\mu(\cos \varphi) \leq W_\mu(1) = (3 + \mu)^2(\mu - 1)^2 \text{ für } -\frac{\mu(3 - \mu^2)}{2(4 - \mu^2)} \geq 1.$$

Da in beiden Fällen die rechtsstehenden Ausdrücke den Wert 25 nicht übertreffen können, ist (2) bewiesen.

Der Beweis hat die «extremalen» Paare  $(z_1, z_2)$  der Ungleichung (1) mitgeliefert, nämlich  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$  und  $(-1, 1)$ .

N. Danikas, Fachbereich Mathematik, Aristoteles Universität  
Thessaloniki, Griechenland

## On Fermat's Last Theorem

In this note we shall prove the following theorem which pertains to Fermat's Last Theorem.

**Theorem:** *Let  $x^n + y^n = z^n$  where  $x, y, z$  and  $n$  are positive integers such that  $x < y < z$  and  $n \geq 2$ , then*

$$z < x^{1 + \frac{1}{n-1}}. \quad (1)$$

**Proof:** As  $z > y$ , we have  $z \geq y + 1$ , and so

$$x^n + y^n = z^n \geq (y + 1)^n$$