

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 43 (1988)  
**Heft:** 4  
  
**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Further generalizations, based on relaxing the hypothesis of continuity and involving the notion of measure zero, are surveyed in [3, pp. 44–46].

Lawrence Zalcman, Dep. of Mathematics,  
Bar-Ilan University, Ramat-Gan, Israel

## REFERENCES

- 1 Lipman B.: On avoiding the mean value theorem. Amer. Math. Monthly 74, 583 (1967).
- 2 Bourbaki N.: Éléments de mathématique. IX. Première partie: Les structures fondamentales de l'analyse. Livre IV: Fonctions d'une variable réelle (théorie élémentaire), Hermann et Cie., Paris 1949.
- 3 Bruckner A. M. and Leonard J. L.: Derivatives. Amer. Math. Monthly 73, Part II, 24–56 (1966).
- 4 Hobson E. W.: The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series vol. 1, 3rd edition. Cambridge University Press 1927.

© 1988 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/88/040120-02\$1.50 + 0.20/0

## Aufgaben

**Aufgabe 965.** Einer Parabel sei eine Folge von sie doppelt berührenden Kreisen  $K_1, K_2, \dots$  einbeschrieben, wobei  $K_1$  der Scheitelkrümmungskreis sei und jeder der Kreise den folgenden berühre. Man ermittle für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  das Verhältnis  $r_n/r_1$  ( $r_i$  = Radius von  $K_i$ ).

C. Bindschedler, Küsnacht

**Lösung.** Auf Grund der Ähnlichkeit genügt es, eine Parabel zu betrachten, z. B. die Parabel  $y^2 = 2x$  mit der Subnormalen 1. Ist  $r_n$  der Radius des  $n$ -ten Kreises, so haben die Berührungspunkte mit der Parabel die Koordinaten  $y = \pm \sqrt{r_n^2 - 1}$  und  $x = (r_n^2 - 1)/2$ . Demzufolge hat der Mittelpunkt des  $n$ -ten Kreises die Abszisse  $(r_n^2 + 1)/2$ . Für die Abszisse des Berührungspunktes mit dem  $(n + 1)$ -ten Kreis gilt dann

$$(r_{n+1}^2 + 1)/2 - r_{n+1} = (r_n^2 + 1)/2 - r_n, \quad \text{d. h.}$$

$$(r_{n+1} - 1)^2/2 = (r_n + 1)^2/2,$$

woraus  $r_{n+1} = r_n + 2$  folgt. Da, wie man leicht sieht,  $r_1 = 1$  ist, gilt  $r_n = 2n - 1$  und somit allgemein  $r_n/r_1 = 2n - 1$ .

J. M. Ebersold, Winterthur

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bolligen), W. Janous (Innsbruck, A), Klasse 7d (Kantonsschule Zug), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers Jr. (Eindhoven, NL), V. Mascioni (Origlio), S. Nanba (Okayama, Japan), I. Paasche (Stockdorf, BRD; 2 Lösungen),

J. Schaer (Alberta, CD), Tsen-Pao Shen (München, BRD), Hj. Stocker (Wädenswil; 3 Lösungen), M. Vowe (Therwil), P. Weisenhorn (Achern, BRD), H. Widmer (Rieden), R. Wyss (Flumenthal).

**Aufgabe 966.** Für ungerade  $n \in \mathbb{N}$  bestimme man den Wert der Summe

$$\sum_{i=0}^{(n-1)/2} (-1)^i \binom{n}{i} (n-2i).$$

P. von Siebenthal, Zürich

**Lösung.** Die Summe sei  $S$ . Durch Substitution  $i = n - j$  findet man

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-2i) = \\ &= \frac{1}{2} n \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} + n \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{n-1}{i-1} \\ &= \frac{1}{2} n (1-1)^n + n (1-1)^{n-1} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } n=1 \\ 0 & \text{für } n>1 \text{ (ungerade).} \end{cases} \end{aligned}$$

O. P. Lossers Jr., Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bolligen), P. Bracken (Toronto, CD), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), K. Dilcher (Halifax, CD), J. M. Ebersold (Winterthur), F. Götze (Jena, DDR), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hong Kong), W. Mascioni (Origlio), S. Nanba (Okayama, Japan; 2 Lösungen), P. Nüesch (Lausanne), I. Paasche (Stockdorf, BRD), H.-J. Seifert (Berlin), Tsen-Pao Shen (München, BRD), M. Smid (Amsterdam, NL), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil), P. Weisenhorn (Achern, BRD), H. Widmer (Rieden), R. Wyss (Flumenthal).

**Aufgabe 967.** Auf der Parabel  $p: y = x^2$  liegen im allgemeinen zwei Punkte  $S_{1,2}$  mit der Eigenschaft, dass die Spiegelbilder  $p_{1,2}^*$  von  $p$  bezüglich  $S_{1,2}$  durch einen vorgegebenen Punkt  $P$  verlaufen. Bestimme zu variablem  $P \in \bar{p}: y^2 = x$  die Envelope der Schar der gemeinsamen Tangenten von  $p_1^*$  und  $p_2^*$ .

Hj. Stocker, Wädenswil

**Lösung.** Für  $u > 1$  muss der Punkt  $(u^2, u) \in \bar{p}$  bezüglich der Spiegelung an  $(s, s^2) \in p$  Bild eines Punktes  $(r, r^2) \in p$  sein, d.h. es müssen  $r + u^2 = 2s$  und  $r^2 + u = 2s^2$  gelten. Elimination von  $r$  ergibt  $s^2 - 2su^2 + \frac{u^4 + u}{2} = 0$  und somit zwei Spiegelzentren  $(s_1, s_1^2)$  und  $(s_2, s_2^2)$  mit  $s_2 > s_1$ ,  $s_1 + s_2 = 2u^2$  und  $s_1 s_2 = \frac{u^4 + u}{2}$ . Die Strecke  $S_1 S_2$  ist parallel zur

gemeinsamen Tangente  $t_u$  von  $p_1^*$  und  $p_2^*$ .  $t_u$  hat somit die Steigung  $s_1 + s_2 = 2u^2$  und berührt  $p_1^*$  im Punkt  $(2s_1 - u^2, 2s_1^2 - u^4)$ . Damit erhält man die Tangentengleichung

$$t_u: y = 2u^2 x + u^4 + 2s_1^2 - 4u^2 s_1 = 2u^2 x + u^4 - 2s_1 s_2 = 2u^2 x - u.$$

Die Enveloppenbedingung  $\frac{\partial y}{\partial u} = 0$  ergibt als Parameterdarstellung der Envelope:  
 $x = \frac{1}{4u}, y = -\frac{u}{2}, u \geq 1$  ( $u = 1$  entspricht dem Grenzfall  $S_1 = S_2$ ). Die Envelope ist also ein Teil eines Hyperbelastes, nämlich  $y = -\frac{1}{8x}, 0 < x \leq \frac{1}{4}$ .

J. Binz, Bolligen

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht), P. Bundschuh (Köln, BRD), I. Paasche (Stockdorf, BRD), H. Widmer (Rieden; 2 Lösungen). Mehrere Lösungen waren inkorrekt.

**Aufgabe 968.** Es sei  $f$  eine rationale Funktion der komplexen Variablen  $z$  mit genau einem Pol und einer Nullstelle, die beide den Betrag 1 haben. Überdies sei  $f(0) = 1$ .  $F$  sei die Menge dieser rationalen Funktionen  $f$ . Man finde die untere Grenze des Realteils von  $f(z)$ , wenn  $z$  ein fester Punkt innerhalb des Einheitskreises ist und  $f$  die Menge  $F$  durchläuft.

A. Pfluger, Zürich

### Lösung des Aufgabenstellers

$f$  hat die Darstellung

$$f(z) = \frac{1 - e^{i\alpha} z}{1 - e^{i\beta} z}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \not\equiv \beta \pmod{2\pi}.$$

Offenbar genügt es, den Fall  $z = r, 0 < r < 1$ , zu betrachten. Da  $\frac{1-r}{1+r} < 1$  ist, kann man zulassen, dass Nullstelle und Pol zusammenfallen. Man hat also die Aufgabe,  $\operatorname{Re} \left\{ \frac{1 - r e^{i\alpha}}{1 - r e^{i\beta}} \right\}$  über alle reellen  $\alpha$  und  $\beta$  zu minimieren.

Durchläuft  $\beta$  ein abgeschlossenes Intervall der Länge  $2\pi$ , so beschreibt  $1 - r e^{i\beta}$  den Kreis über der Strecke von  $1 - r$  bis  $1 + r$  als Durchmesser, und daher  $\frac{1}{1 - r e^{i\beta}}$  den Kreis über der Strecke von  $\frac{1}{1+r}$  bis  $\frac{1}{1-r}$  als Durchmesser. Dieser Kreis hat den Mittelpunkt  $\frac{1}{1-r^2}$  und den Radius  $\frac{r}{1-r^2}$ , er wird also parametrisiert durch  $\frac{1 - r e^{i\gamma}}{1 - r^2}, -\pi \leq \gamma \leq \pi$ . Damit reduziert sich die Aufgabe darauf, das Minimum des Realteils von

$(1 - r e^{i\alpha})(1 - r e^{i\gamma})$ , also der Funktion

$$\varphi(\alpha, \beta) = 1 - (\cos \alpha + \cos \gamma)r + \cos(\alpha + \gamma) \cdot r^2$$

zu finden, wenn  $\alpha$  und  $\gamma$  unabhängig von einander die reellen Zahlen durchlaufen. Da an einer Stelle  $(\alpha, \gamma)$ , wo das Minimum erreicht wird, die beiden partiellen Ableitungen verschwinden, so folgt

$$\sin \alpha - r \sin(\alpha + \gamma) = 0, \quad \sin \gamma - r \sin(\alpha + \gamma) = 0,$$

also

$$\sin \alpha = \sin \gamma$$

und daher  $\gamma = \alpha$  oder

$$\alpha + \gamma = \begin{cases} \pi & \text{für } 0 \leq \alpha \leq \pi \\ -\pi & \text{für } 0 \geq \alpha \geq -\pi \end{cases}.$$

Im letzteren Fall ist wegen (1)  $\sin \alpha = 0$ , also  $\alpha = 0$  und  $\gamma = \pi$  oder umgekehrt, und daher  $\varphi(0, \pi) = \varphi(\pi, 0) = 1 - r^2$ , und wegen  $1 - r^2 > (1 - r)^2$  liefert dieser Fall nicht das Minimum für  $\varphi$ . Daher muss  $\alpha = \gamma$  sein, und (1) ergibt

$$\sin \alpha (1 - 2r \cos \alpha) = 0.$$

Für  $0 < r \leq 1/2$  muss  $\sin \alpha = 0$ , also  $\alpha = 0$  oder  $\pi$  sein; aber  $\alpha = \pi$  liefert das Maximum für  $\varphi$ . Für  $1/2 \leq r < 1$  kann  $\alpha = 0$  oder  $2r \cos \alpha = 1$  sein. Im letzteren Fall erhält man

$$\varphi(\alpha, \alpha) = 1 - 2r \cdot \frac{1}{2r} + \left(2 \cdot \frac{1}{2r^2} - 1\right) r^2 = \frac{1}{2} - r^2 < (1 - r)^2 \quad \text{für } \frac{1}{2} < r < 1,$$

also  $\frac{1}{2} - r^2$  für das Minimum von  $\varphi$ , wenn  $\frac{1}{2} \leq r < 1$  ist.

Daraus folgt, dass

$$\operatorname{Re} f(z) \geq \frac{1 - |z|}{1 + |z|}, \quad \text{wenn } 0 \leq |z| \leq 1/2 \text{ ist,}$$

und

$$\operatorname{Re} f(z) \geq 1 - \frac{1/2}{1 - |z|^2}, \quad \text{wenn } \frac{1}{2} \leq |z| < 1.$$

Weitere Lösungen sandten F. Wenger (Sursee) und H. Widmer (Rieden). Teillösungen gingen ein von W. Janous (Innsbruck, A) und L. Kuipers (Sierre).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis 10. Februar 1989 an Dr. H. Kappus. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit Problem ... A, B bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 39, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68), Problem 872 A (Band 36, S. 175).

**Aufgabe 989.** Es seien  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  die Winkel eines ebenen Dreiecks und  $\alpha_1 \leq \alpha_2, \alpha_3$ . Dann gilt die Ungleichung

$$\alpha_1 \leq 2 \arccot(\sqrt{3} + \sum (1/\alpha_i) - 9/\pi)$$

mit Gleichheit genau im gleichseitigen Fall. Dies ist zu beweisen.

V. D. Mascioni, Origlio

**Aufgabe 990.** Gegeben sei eine beliebige komplexe magische (3,3)-Matrix  $A$  (d. h.: alle 6 Zeilen- und Spaltensummen sowie die Summen der Haupt- und Nebendiagonalen stimmen überein). Man ermittle die Eigenwerte von  $A$ .

I. Paasche, Stockdorf, BRD

**Aufgabe 991.** Prove that if the area of face  $S$  of a tetrahedron is the average of the areas of the other three faces, then the line joining the incenter to the centroid of the tetrahedron is parallel to face  $S$ .

S. Rabinowitz, Littleton, USA

**Aufgabe 992.** It is shown in [1] that

$$\sqrt{2(a^2 + b^2)} \geq \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} + \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} \geq a + b.$$

Prove more generally that

$$\left\{ n^{p-1} \sum_{i=1}^n a_i^p \right\}^{1/p} \geq S \geq A$$

where  $S = \sum_{i=1}^n \{a_1^p x_i^p + a_2^p x_{i+1}^p + \dots + a_n^p x_{i+n-1}^p\}^{1/p}$ ,  $A = \sum a_i$ ,  $p \geq 1$ ,  $x_i = x_{i+n}$ , and  $\sum_{i=1}^n x_i^p = 1$ .

M. S. Klamkin, Alberta, CD

### REFERENCES

- 1 Hobson E.W.: A Treatise on Plane & Advanced Trigonometry. Dover, New York, 1957, pp. 87–88.