Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 43 (1988)
Heft: 4

Artikel: Klassisches und Modernes über Steiner Tripelsysteme
Autor: Zeitler, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40806

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Vol. 43 Nr. 4 Seiten 97–128 Basel, Juli 1988

Klassisches und Modernes über Steiner Tripelsysteme

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, Probleme (es gibt deren sehr viele) und Entwicklungen innerhalb der Blockplantheorie, speziell der Steiner Tripelsysteme, zu skizzieren. Es soll also lediglich ein Überblick vermittelt werden. Dies bedeutet, Verzicht auf Details, Verzicht auf Beweise. An Hand von Resultaten wird versucht, einzelne Entwicklungslinien aufzuzeigen.

1. Steiner Tripelsysteme – was ist das?

Die im folgenden definierten Begriffe sind weltweit üblich, nicht aber die Bezeichnungen. Einheitlichkeit wäre hier wünschenswert!

1.1 t-Blockpläne $S_\lambda(t, k, v)$

Gegeben sei eine Menge V mit $|V| = v$ Elementen, den Punkten. In ihr weiter eine Menge B von k-elementigen Teilmengen, den Blöcken oder Geraden. Dabei gelte $k \geqq 2$ und $v > k$. Schliesslich sollen durch t Punkte $(1 \leqq t \leqq k)$ genau $\lambda \in \mathbb{N}$ Blöcke gehen. Dann sprechen wir von einem t-Blockplan (t-Design) und schreiben $S_\lambda(t, k, v)$. Für diese Strukturen lassen sich Sätze beweisen. Wir geben einige von ihnen an.

$$|B| = b = \frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}} \lambda;$$

Durch s Punkte $(1 \leqq s \leqq t)$ gehen genau r_s Geraden

$$r_s = \frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}} \lambda;$$

$b\,k = v\,r_1$ und $r_1(k-1) = (v-1)\,r_2$;

$b \geqq v$ (Ungleichung von R. A. Fisher)

...

1.2 Blockpläne. Taktische Konfigurationen

2-Blockpläne $S_\lambda(2, k, v)$ werden als Blockpläne und Inzidenzstrukturen $S_r(1, k, v)$, also 1-Blockpläne, als taktische Konfigurationen bezeichnet.

1.3 Steiner Systeme

Im Falle $\lambda = 1$ sprechen wir von Steiner Systemen und schreiben dann kurz $S(t, k, v)$.

$t > 3$

Von dieser Art kennt man bis heute nur die folgenden Systeme:

$S(5, 6, n)$ und $S(4, 5, n-1)$ mit $n \in \{12, 24, 48, 72, 84\}$;
$S(5, 8, 24)$ und $S(4, 7, 23)$;
$S(5, 7, 28)$ und $S(4, 6, 27)$

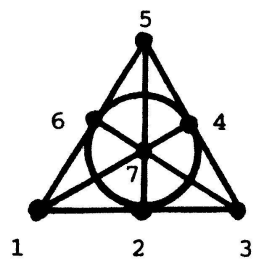
(E. Witt, R. D. Carmichael, W. H. Mills, R. H. F. Denniston).
Die Systeme $S(5, 6, 12)$ und $S(5, 8, 24)$ werden oft als Witt-Designs bezeichnet. Es handelt sich um wahre Kleinodien der Blockplantheorie.
Nach dem Gesagten ist die zentrale Frage nach der Existenz von $S(t, k, v)$ mit $t \geqq 6$ unbeantwortet.

$t = 3$, also $S(3, k, v)$.

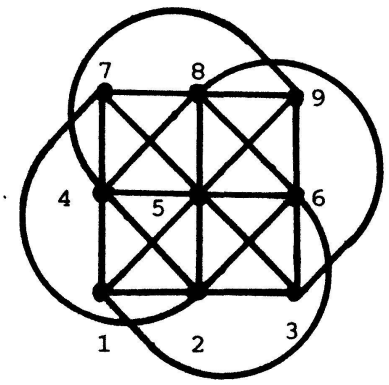
Dazu gehören die Möbius-Räume $MG(d, q)$ und die Steiner Quadrupelsysteme $S(3, 4, v) = SQS(v)$ (A. Hartmann, C. C. Lindner, W. Neidhardt, A. Rosa).

$t = 2$, also $S(2, k, v)$.

Von besonderem Interesse sind hier die endlichen projektiven Räume $PG(d, q)$ und die endlichen affinen Räume $AG(d, q)$. Im Falle $k = 3$ haben wir es mit den Steiner Tripelsystemen zu tun, $S(2, 3, v) = STS(v)$. Sie werden uns hier in besonderem Masse beschäftigen. Deshalb geben wir zwei Beispiele an. Einmal die projektive Ebene $PG(2, 2)$ der Ordnung 2 und dann die affine Ebene $AG(2, 3)$ der Ordnung 3. Im ersten Fall handelt es sich um ein $STS(7)$, im zweiten um ein $STS(9)$ (Figur 1).



$PG(2, 2) = STS(7)$



$AG(2, 3) = STS(9)$

Figur 1

2. Wo gibt es t-Blockpläne, wo braucht man sie?

2.1 Etwas Historie: Jakob Steiner (1796 – 1863)

J. Steiner – der bekannte Schweizer Geometer – entdeckte, dass die 9 (bzw. 28) Wendepunkte einer Kurve dritter (bzw. vierter) Ordnung zu je 3 (bzw. 4) auf einer Geraden liegen. Diese Punkte bilden dann ein STS (9) (bzw. SQS (28)). Seine diesbezüglichen Entdeckungen waren von weitreichender Bedeutung sowohl für die Funktionentheorie (abelsche Funktionen) als auch für die Algebra (Gleichungen 28. Grades).

2.2 Und die Physik?

Im Bereich der Physik sollen Blockpläne bei der Beschreibung der Geometrie des Atomkerns, aber auch bei der „Haufenbildung" (Cluster) in Korpuskularstrahlen eine wesentliche Rolle spielen.

2.3 Kodierungstheorie – ein sehr modernes Thema

Die Kodierungstheorie ist eine Disziplin, die sich erst in den letzten Jahrzehnten entwickelt hat. Auch dabei treten wieder t-Blockpläne auf. So induziert etwa jeder 2-Blockplan $S_\lambda(2, k, v)$ einen f-fehlererkennenden Kode der Wortlänge b mit $f \leqq 2(r_1 - \lambda) - 1$ und einen f-fehlerkorrigierenden Kode der Wortlänge b mit $f \leqq r_1 - \lambda - \frac{1}{2}$. Von ganz besonderer Bedeutung für die Kodierungstheorie sind die bereits erwähnten Systeme $S(4, 7, 23)$ und $S(5, 8, 24)$. Sie hängen eng mit dem binären Golay-Kode zusammen.

2.4 Aufstellung von Versuchsplänen

Zwei Beispiele sollen diese Art Anwendung der Blockplantheorie verdeutlichen. An einem Schachturnier sind v Personen beteiligt. Jeder Spieler hat r Partien zu spielen. Gesamtzahl aller Partien? Hinweis: $S_r(1, 2, v)$.
v verschiedene Arzneimittel sollen getestet werden. Jedes dieser Medikamente wird von r Personen getestet und jede Versuchsperson testet k Medikamente. Anzahl der Testpersonen? Hinweis: $S_r(1, k, v)$. Die beiden Beispiele erscheinen recht künstlich, ja kurios. Doch Überlegungen dieser Art werden bei der Planung statistischer Experimente, bei der Gewinnmaximierung gewisser Spiele (Lottosysteme) oder bei der Organisation von Fernsprechverteilern tatsächlich und sogar häufig angewendet (R. A. Fisher, D. Raghavarao).
Selbstverständlich finden sich Probleme dieser Art besonders zahlreich im Bereich der Unterhaltungsliteratur.

2.5 Eine verrückte Anwendung

Es ist kaum zu glauben! Aber Blockplantheorie lässt sich sogar zur Lösung von Problemen aus der Geometrie verwenden.
So kann man etwa mit dem schon erwähnten Steinersystem $S(5, 8, 24)$ (über das Leech-Gitter) ausgerechnet im 24-dimensionalen euklidischen Raum eine „gute" Kugelpackung konstruieren (N. J. A. Sloane). Dies überrascht um so mehr, als Probleme dieser Art im Dreidimensionalen noch nicht abschliessend gelöst sind.
Im folgenden beschränken wir uns auf Steiner Tripelsysteme $STS(v)$. Sie sind im Vergleich zu allgemeineren t-Blockplänen relativ einfach, stellen aber trotzdem eine äusserst interessante und reichhaltige Struktur dar.

3. Folklore: Die Existenzbedingungen für $STS(v)$

Schon Reverend Thomas Penyngton Kirkman (1806–1895) stellte fest, dass $STS(v)$ genau dann existieren, wenn $v = 7, 9 + 6n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$. Die Menge dieser „zulässigen" Zahlen, der sogenannten Steinerzahlen, bezeichnen wir mit STS. Auf die Trivialfälle $v = 1$, $v = 3$ wird verzichtet. Dass diese Bedingung notwendig ist, folgt aus den in Abschnitt 1 für t-Blockpläne ganz allgemein angegebenen Formeln. Will man umgekehrt beweisen, dass für alle $v \in STS$ wirklich $STS(v)$ existieren, so bedarf dies genauer Konstruktionsanweisungen. Damit sind wir bei dem wichtigsten Thema, den Konstruktionen.

4. Und wie konstruiert man $STS(v)$?

Es ist eine grosse Zahl von verschiedenartigsten Konstruktionsverfahren entwickelt worden. Besonderen Einfallsreichtum bewiesen dabei R. C. Bose und H. Hanani. Wir unterscheiden direkte und rekursive Konstruktionen und beschränken uns darauf, einige Beispiele zu skizzieren.

4.1 Eine direkte Konstruktion

Gegeben sei eine endliche multiplikative Gruppe G ungerader Ordnung $1 + 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Als Punkte eines Systems $STS(3 + 6n)$ wählen wir die Elemente der Menge $V = G \times \{1, 2, 3\}$ und als Geraden die folgenden Teilmengen von V:

$$\{(x, 1), (x, 2), (x, 3)\} \quad \text{für alle } x \in G,$$

$$\{(x, 1), (y, 1), (z, 2)\}, \quad \{(x, 2), (y, 2), (z, 3)\},$$

$$\{(x, 3), (y, 3), (z, 1)\} \quad \text{für alle } x, y \in G \text{ mit } x \neq y \text{ und } xy = z^2.$$

Zwei so konstruierte Systeme $STS(3 + 6n)$ sind genau dann isomorph, wenn dies für die verwendeten Gruppen gilt. Die Konstruktion ist insoferne typisch, als sie rein

kombinatorischen Charakter hat. Ohne Motivation fällt ein Verfahren vom Himmel. Wunderbarerweise zeigt sich, dass alles stimmt.

Beispiel:

$G = \{a, b, c\}$ sei die zyklische Gruppe der Ordnung 3. Wir geben die Multiplikationstafel an. Es gilt $a^2 = a$, $b^2 = c$ und $c^2 = b$.

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

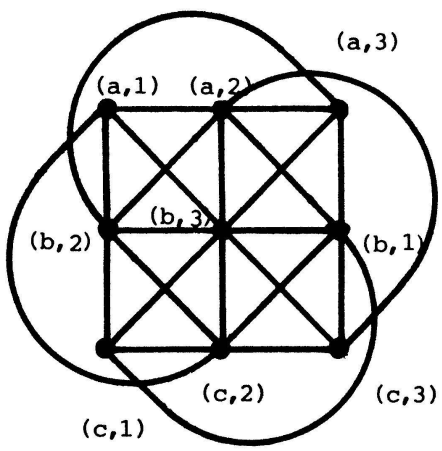
Punkte:

$$V = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2), (a, 3), (b, 3), (c, 3)\}.$$

Geraden:

$$\begin{array}{lll}
\{(a, 1), (a, 2), (a, 3)\}, & \{(b, 1), (b, 2), (b, 3)\}, & \{(c, 1), (c, 2), (c, 3)\}, \\
\{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}, & \{(a, 1), (c, 1), (b, 2)\}, & \{(b, 1), (c, 1), (a, 2)\}, \\
\{(a, 2), (b, 2), (c, 3)\}, & \{(a, 2), (c, 2), (b, 3)\}, & \{(b, 2), (c, 2), (a, 3)\}, \\
\{(a, 3), (b, 3), (c, 1)\}, & \{(a, 3), (c, 3), (b, 1)\}, & \{(b, 3), (c, 3), (a, 1)\}.
\end{array}$$

Figur 2 zeigt, dass unser neues System zu dem in Figur 1 isomorph ist.



Figur 2

4.2 Zwei rekursive Konstruktionen

Besonders bekannt ist eine Produktkonstruktion, die gestattet, aus zwei Systemen der Ordnungen v_1 und v_2 ein neues von der Ordnung $v_1 \cdot v_2$ zu konstruieren. H. Werner bewies einen interessanten Faktorisierungssatz bezüglich dieser Produktbildung, nach dem die Zerlegung eines $STS(v)$ in Faktoren (bis auf Isomorphie der Faktoren und bis auf deren Ordnung) eindeutig ist. Wir verzichten hier absichtlich auf dieses gängige Verfahren. Auch die elegante Hilfsmatrizenmethode von H. Lenz und viele andere Methoden (Verdreifachung, mit Transversaldesign, Perturbationstrick, ...) werden unterdrückt. Statt dessen teilen wir zwei, besonders stark anschaulich geometrisch motivierte Verfahren mit.

Von $STS(v)$ nach $STS(2v+1)$

Das Zentralverfahren (T. Skolem)

Gegeben sei ein Steiner Tripelsystem S_1 der Ordnung v mit der Punktmenge $V_1 = \{1, 2, \ldots, v\}$. Wir denken uns S_1 als Grundfläche einer Pyramide mit Spitze Z. Auf jeder Verbindungsgeraden von Z mit einem Punkt $i \in V_1$ gibt es einen weiteren Punkt i'. So erhalten wir die Menge V aller Punkte des neuen Systems $V = V_1 \cup \{1', 2', \ldots, i'\} \cup \{Z\}$. Neben den Geraden aus S_1 nehmen wir $\{i, i', Z\}$ mit $i \in V_1$ dazu und weiter zu jeder Geraden $\{i, j, k\}$ aus S_1 die drei Geraden $\{i, j', k'\}$, $\{i', j', k\}$, $\{i', j, k'\}$. Die Punkte i, j, k, i', j', k', Z bilden dann ein $STS(7)$, eine projektive Ebene der Ordnung 2. Besonders suggestiv ist es, sich das System S_1 einfach „hochgezogen" zu denken.

Beispiel:

Startsystem $S_1 = STS(7)$ aus Figur 1.

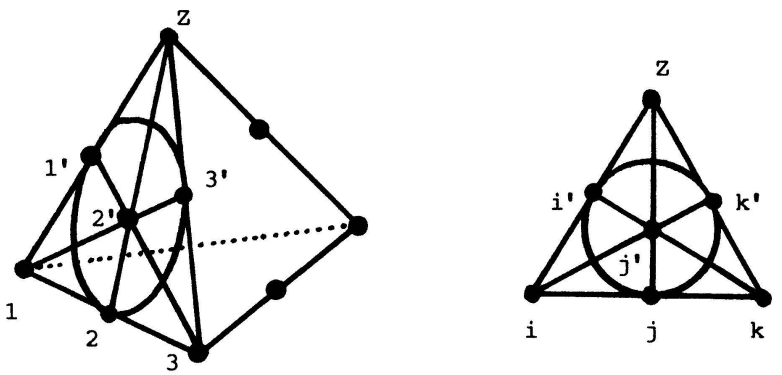
Punkte: $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, Z, 1', 2', 3', 4', 5', 6', 7'\}$.

Geraden:

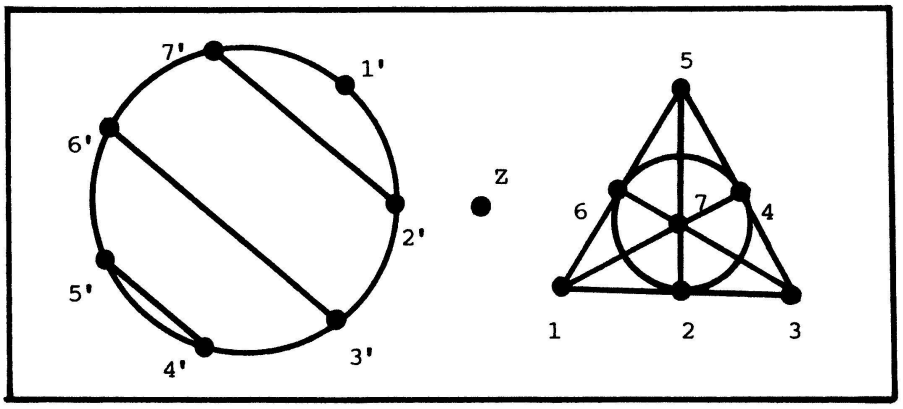
$$\begin{array}{lllllll}
\{1,2,3\}, & \{1,4,7\}, & \{1,5,6\}, & \{2,5,7\}, & \{2,4,6\}, & \{3,6,7\}, & \{3,4,5\}, \\
\{1,1',Z\}, & \{2,2',Z\}, & \{3,3',Z\}, & \{4,4',Z\}, & \{5,5',Z\}, & \{6,6',Z\}, & \{7,7',Z\}, \\
\{1,2',3'\}, & \{1,4',7'\}, & \{1,5',6'\}, & \{2,5',7'\}, & \{2,4',6'\}, & \{1',2,3'\}, & \{1',4,7'\}, \\
\{1',5,6'\}, & \{2',5,7'\}, & \{2',4,6'\}, & \{1',2',3\}, & \{1',4',7\}, & \{1',5',6\}, & \{2',5',7\}, \\
\{2',4',6\}, & \{3,6',7'\}, & \{3,4',5'\}, & \{3',6,7'\}, & \{3',4,5'\}, & \{3',6',7\}, & \{3',4',5\}.
\end{array}$$

Das Polygonverfahren (T. P. Kirkman)

Wie gehabt, starten wir wieder mit einem $S_1 = STS(v)$. Dann nehmen wir zu seinen Punkten V_1 die Punkte $Z, 1', 2', \ldots, v'$ und zu seinen Geraden auch wieder die Ge-



Figur 3



Figur 4

raden $\{i, i', Z\}$ mit $i \in V_1$ dazu. Allerdings wählen wir jetzt eine völlig andere geometrische Interpretation. Die neuen Punkte sollen – wie Figur 4 im Falle $v = 7$ zeigt – Ecken eines regulären Polygons (mit Mittelpunkt M) sein.
Nun ordnen wir dem Punkt 1 die Endpunkte der zu $(M, 1')$ senkrechten Sehnen $(2', 7')$, $(3', 6')$, $(4', 5')$ zu und erhalten auf diese Weise drei neue Geraden $\{1, 2', 7'\}$, $\{1, 3', 6'\}$, $\{1, 4', 5'\}$. Entsprechend verfahren wir mit den übrigen Punkten aus V_1. Dies ergibt:

$$\begin{array}{lllll}
\{2, 1', 3'\}, & \{3, 2', 4'\}, & \{4, 3', 5'\}, & \{5, 4', 6'\}, & \{6, 5', 7'\}, \quad \{7, 1', 6'\}, \\
\{2, 4', 7'\}, & \{3, 1', 5'\} & \{4, 2', 6'\}, & \{5, 3', 7'\}, & \{6, 1', 4'\}, \quad \{7, 2', 5'\}, \\
\{2, 5', 6'\}, & \{3, 6', 7'\}, & \{4, 1', 7'\}, & \{5, 1', 2'\}, & \{6, 2', 3'\}, \quad \{7, 3', 4'\}.
\end{array}$$

Ein Vergleich der beiden Verfahren zeigt, dass wir zwei nicht-isomorphe Systeme der Ordnung $1 + 2v$ erhalten haben. Nicht-Isomorphiebeweise gestalten sich meist recht schwierig. Wie soll man schon feststellen, dass es keinen Isomorphismus gibt? Bedeutet das nicht uferloses Herumprobieren?

5. Isomorphie

Wieviele paarweise nicht-isomorphe STS (v) *gibt es bei gegebener Ordnung* v*?* Wir bezeichnen diese Anzahl mit $N(v)$.

Was weiss man?

v	$N(v)$	
7	1	
9	1	
13	2	V. de Pasquale 1899
15	80	F. N. Cole, L. D. Cummings, H. S. White 1917
19	$\geqq 284\,407$	R. A. Mathon, K. T. Phelps, A. Rosa 1983
21	$\geqq 2\,160\,980$	
25	$\geqq 10^{14}$	

Im Jahre 1974 fand R. M. Wilson die folgende Abschätzungsformel

$$e^{\frac{v^2}{12}(\ln v - 5)} \leqq N(v) \leqq e^{\frac{v^2}{2}\ln v}.$$

Diese Formel gilt zwar für alle $v \in STS$, für kleine Werte von v ist sie aber schlecht. So ergibt sich z.B. mit der Wilson-Formel nur $N(19) \geqq 8894$. (Die Abschätzung besagt grob, dass $N(v)$ von der Grössenordnung $v^{\alpha v^2}$ mit $\alpha > 0$ ist.) Nach dem Beweis der van der Waerden-Vermutung im Jahre 1980 durch den russischen Mathematiker G. P. Egoritschev konnte der Faktor 12 der linken Seite der Ungleichung durch 6 ersetzt werden. Es kann extrem schwierig sein, von zwei gegebenen Steiner Tripelsystemen gleicher Ordnung zu entscheiden, ob sie isomorph sind oder nicht.

6. Automorphismen

Eine Frau wird erst schön durch die Liebe, eine Struktur durch die Automorphismen. Es gibt auch hierbei noch viel zu tun, es bleiben viele Probleme offen.

6.1 Gegeben: Einzelne Permutationen

Gegeben sei eine einzelne Permutation α auf einer Menge V mit $|V| = v \in STS$.

Für welche $v \in STS$ *gibt es Systeme* $STS(v) = S_\alpha(v)$ *so, dass* α *Automorphismus ist?*

Zu dieser Frage gibt es viele interessante Antworten. Wir zählen nur einige davon auf.

6.1.1 Wenn α ein Zykel der Länge v ist, dann gibt es solche Systeme $S_\alpha(v)$ für alle $v \in STS$, ausser $v = 9$ (R. Peltesohn).

6.1.2 Wenn α genau einen Fixpunkt besitzt und auf den übrigen Punkten ein Zykel der Länge $v-1$ ist (dann heisst α auch 1-rotational), so gibt es solche Systeme $S_\alpha(v)$ genau dann, wenn $v = 9, 27 + 24n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ (A. Rosa).

6.1.3 Wenn α eine Involution (α zweimal nacheinander angewandt ergibt die identische Abbildung) ist und genau einen Fixpunkt besitzt, dann gibt es solche Systeme $S_\alpha(v)$ genau dann, wenn $v = 9, 19, 25, 27 + 24n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ (A. Rosa, J. Doyen, L. Teirlinck).

Der folgende Satz geht weit über all diese Einzelergebnisse hinaus.

6.2 Gegeben: Gruppe

Zu jeder endlichen abstrakten Gruppe G gibt es ein STS (v), dessen Automorphismengruppe G ist. Dabei gilt $v \leqq |G|^{e|G|}$.

Noch im Jahre 1973 musste man sich auf eine entsprechende Aussage für unvollständige ($\lambda \leqq 1$) Steiner Tripelsysteme beschränken. Erst im Jahre 1978 gelang F. Mendelsohn mit Methoden der universellen Algebra ein Beweis. Unschön bleibt die merkwürdige Abschätzung für v. Leider handelt es sich nur um einen Existenzbeweis. Die explizite Bestimmung der Automorphismengruppe eines vorgegebenen Systems $STS(v)$ ist im allgemeinen sehr schwierig.
Man kann beweisen, dass es zu jedem gegebenen System $STS(v)$ mit $v \in STS$ eine Gruppe von scharf 1-transitiven Automorphismen gibt. Das muss nicht die volle Automorphismengruppe sein. (Dabei heisst scharf 1-transitiv, dass es zu zwei gegebenen, verschiedenen Punkten $x, y \in V$ stets genau einen Automorphismus gibt, der x auf y abbildet.)

6.3 Die Sätze von M. Hall

Aus der Fülle weiterer Ergebnisse greifen wir lediglich noch drei heraus (M. Hall).

6.3.1 Für jeden Punkt eines $STS(v)$ gebe es eine Involution mit genau diesem Punkt als Fixpunkt. Dann erzeugt jedes Dreieck (drei Punkte nicht auf einer Geraden) in unserem $STS(v)$ ein $STS(9)$. Es gilt auch die Umkehrung.

6.3.2 Für jede Gerade eines $STS(v)$ gebe es eine Involution mit genau den Punkten dieser Geraden als Fixpunkten. Dann erzeugt jedes Dreieck in unserem $STS(v)$ entweder ein $STS(9)$ oder aber ein $STS(7)$. Die Umkehrung gilt nicht.

6.3.3 Zu $STS(v)$ gebe es eine Automorphismengruppe, die auf den Dreiecken transitiv operiert. Dann ist $STS(v)$ entweder vom Typ 1 oder vom Typ 2.

Typ 1: Jedes Dreieck in unserem $STS(v)$ erzeugt ein $STS(7)$ (das sind die projektiven Räume der Ordnung 2).

Typ 2: Jedes Dreieck in unserem $STS(v)$ erzeugt ein $STS(9)$ (das sind nicht unbedingt die affinen Räume der Ordnung 3).

7. Ableitungen

7.1 Ableitung eines Steinersystems?

Ein Steinersystem $S(t, k, v)$ habe die Punktmenge V und die Geradenmenge B. Wir greifen einen Punkt x heraus, und betrachten alle Geraden durch ihn. Dann bilden die Punktmenge $V' = V \setminus \{x\}$ und die genannte Geradenmenge

$$B' = \{b \setminus \{x\} \mid b \in B \quad \text{und} \quad x \in b\}$$

ein Steinersystem $S(t-1, k-1, v-1)$. Man spricht von der Ableitung des Systems $S(t, k, v)$ im Punkt x.

7.2 Probleme und Lösungen

7.2.1 Gegeben: $v \in STS$

Für welche $v \in STS$ gibt es abgeleitete $STS(v)$?

Notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von $SQS(v)$ ist $v = 8, 10 + 6n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Daraus folgt bereits, dass es für alle $v \in STS$ abgeleitete Systeme $STS(v)$ gibt.

7.2.2 Gegeben: $STS(v)$

Ist jedes $STS(v)$ Ableitung eines $SQS(v)$?

Für $v < 13$ ist diese Frage seit langer Zeit positiv beantwortet, für $v = 13$ erst seit 1972. Und wie steht es mit den 80 Systemen $STS(15)$? Im Jahre 1980 wusste man, dass 43 Systeme dieser Art abgeleitet sind, 1984 waren es schon 68. Ein Jahr später zeigten dann J. Diener, E. Schmitt, H. L. de Vries mit Computereinsatz, dass jedes der 80 Systeme Ableitung eines geeigneten Quadrupelsystems ist. Weitere explizite Aussagen über kleine Werte von v liegen nicht vor.

7.2.3 Allgemeinere Aussagen

K. T. Phelps fand einige allgemeinere Sätze. So konnte er etwa zeigen, dass ein $STS(1 + 2v)$, das entweder ein abgeleitetes Untersystem der Ordnung v besitzt oder aber ein „Untersystem" der Ordnung v mit einem „fehlenden" Tripel, dann selber abgeleitet ist.

7.3 Und nochmals eine Verallgemeinerung!

Welche $STS(v)$ sind s-fache Ableitungen von $S(2 + s, 3 + s, v + s)$? Dabei gilt $s \in \mathbb{N}$.

Die Frage ist in dieser Allgemeinheit nicht beantwortet. Wohl aber liegen einzelne Beispiele vor.
Dreifache Ableitung der in Abschnitt 1.3 angegebenen Systeme $S(5, 6, n)$ liefert $S(2, 3, n-3)$, also Steiner Tripelsysteme $STS(n-3)$ für $n \in \{12, 24, 48, 72, 84\}$.

Bemerkung:

Die beiden als Witt-Design bekannten Systeme $S(5, 6, 12)$ und $S(5, 8, 24)$ ergeben die Ableitungen $S(4, 5, 11)$, $S(4, 7, 23)$, $S(3, 6, 22)$, $S(2, 5, 21)$. Diese 6 Systeme sind besonders bedeutungsvoll, da es sich bei den zugehörigen Automorphismengruppen um die sogenannten Mathieugruppen – das sind spezielle einfache Gruppen – handelt. Die Kardinalität dieser Gruppen ist bekannt, auch über die Transitivität weiss man Bescheid. So ist etwa die Automorphismengruppe von $S(5, 6, 12)$ die einzige scharf 5-transitive Gruppe. Sie besitzt die Kardinalität $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$ (Mathieu).

8. Auflösbare Systeme

8.1 Die Schulmädchengeschichte

Der Figur 1 entnehmen wir für das $STS(9)$ die Existenz einer „Parallelenschar", nämlich $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{7, 8, 9\}$. Dabei stellt eine Menge von Geraden eine „Parallelenschar" (oder auch einen 1-Faktor) dar, wenn durch jeden Punkt aus V genau eine Gerade der Schar geht und keine zwei Geraden der Schar einen Punkt gemeinsam haben. Noch mehr! Wir finden in Figur 1 drei weitere „Parallelenscharen": $\{1, 4, 7\}$, $\{2, 5, 8\}$, $\{3, 6, 9\}$; $\{1, 5, 9\}$, $\{3, 4, 8\}$, $\{2, 6, 7\}$; $\{3, 5, 7\}$, $\{2, 4, 9\}$, $\{1, 6, 8\}$. Jetzt ist die Menge B aller Geraden in vier „Parallelenscharen" so eingeteilt (partitioniert), dass jede Gerade in genau einer Schar liegt. Wir sprechen von einem „Parallelismus" (oder auch von einer 1-Faktorisierung) und nennen das System $STS(v)$ jetzt auflösbar.
Und hier eine Prognose: Falls ein System $STS(v)$ auflösbar sein soll, muss jede „Parallelenschar" notwendig genau $\frac{1}{3}v$ Geraden enthalten und es muss genau b: $\frac{1}{3}v = \frac{1}{2}(v-1)$ „Parallelenscharen" geben.
Ein Beispiel eines in dieser Weise auflösbaren Systems liefert das bekannte Schulmädchenproblem von T. P. Kirkman aus dem Jahre 1850: 15 Schulmädchen machen an jedem der 7 Tage einer Woche einen Spaziergang. Sie bilden dabei stets Reihen zu je drei. Lässt es sich so einrichten, dass keine zwei Mädchen zweimal miteinander gehen?
Hier ist eine Lösung:

Mo	$\{1, 2, 5\}$	$\{3, 14, 15\}$	$\{4, 6, 12\}$	$\{7, 8, 11\}$	$\{9, 10, 13\}$
Di	$\{1, 3, 9\}$	$\{2, 8, 15\}$	$\{4, 11, 13\}$	$\{5, 12, 14\}$	$\{6, 7, 10\}$
Mi	$\{1, 4, 15\}$	$\{2, 9, 11\}$	$\{3, 10, 12\}$	$\{5, 7, 13\}$	$\{6, 8, 14\}$
Do	$\{1, 6, 11\}$	$\{2, 7, 12\}$	$\{3, 8, 13\}$	$\{4, 9, 14\}$	$\{5, 10, 15\}$
Fr	$\{1, 8, 10\}$	$\{2, 13, 14\}$	$\{3, 4, 7\}$	$\{5, 6, 9\}$	$\{11, 12, 15\}$
Sa	$\{1, 7, 14\}$	$\{2, 4, 10\}$	$\{3, 5, 11\}$	$\{6, 13, 15\}$	$\{8, 9, 12\}$
So	$\{1, 12, 13\}$	$\{2, 3, 6\}$	$\{4, 5, 8\}$	$\{7, 9, 15\}$	$\{10, 11, 14\}$

Dabei wurden die Mädchen mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 15 bezeichnet.
Jede Zeile stellt eine „Parallelenschar" dar. Jede Gerade kommt in genau einer Schar vor. Wir haben ein auflösbares $STS(15)$.

8.2 Gegeben: $v \in STS$

Für welche Ordnungen $v \in STS$ gibt es auflösbare Systeme $STS(v)$?

Im Jahre 1971 bewiesen R. M. Wilson und D. K. Ray-Chaudhuri, dass genau für alle Ordnungen $v = 9 + 6n$, $n \in \mathbb{N}_0$, auflösbare Steiner Tripelsysteme existieren. Die Entscheidung, ob ein vorgegebenes System $STS(v)$ mit $v = 9 + 6n$, $n \in \mathbb{N}_0$, auflösbar ist, und die explizite Bestimmung des „Parallelismus" kann sehr schwierig sein. Wieviele verschiedene Auflösungen existieren jeweils?

9. Die Sache mit den Untersystemen

9.1 Untersystem?

Ein $STS(w)$ mit der Punktmenge W und der Geradenmenge G heisst Untersystem des Systems $STS(v)$ mit der Punktmenge V und der Geradenmenge B, wenn $W \subset V$ und $G \subset B$.

9.2 Problem

Seien $v, w \in STS$ und $v > w$. Gibt es ein $STS(v)$ mit einem Untersystem $STS(w)$?

Die Antwort lautet ja, sofern die Bedingung $w \leqq \frac{1}{2}(v-1)$ erfüllt ist. Ein erster Beweis dieses Satzes wurde 1973 von J. Doyen – R. M. Wilson, ein weiterer, wesentlich vereinfachter 1979 von G. Stern – H. Lenz gegeben.
Ist statt $v, w \in STS$ ein System $STS(v)$ gegeben, so kann die explizite Bestimmung möglicher (etwa aller maximalen) Untersysteme sehr schwierig sein.

10. Weitere Definitionen – weitere Probleme

10.1 Definition: Disjunkte $STS(v)$

Zwei $STS(v)$ über derselben Punktmenge V heissen *disjunkt*, wenn sie keine Gerade gemeinsam haben.
Sind B_1, B_2 die zugehörigen Geradenmengen, so gilt also $|B_1 \cap B_2| = 0$.

10.2 Problem

Wie gross ist bei gegebener Ordnung $v \in STS$ die Maximalzahl $D(v)$ paarweise disjunkter $STS(v)$?

Schon T. P. Kirkman wusste $D(7) = 2$, $D(9) = 7$. Inzwischen fand H. F. Denniston noch $D(13) = 11$. Von einigen Teilergebnissen L. Teirlincks abgesehen ist nichts bekannt.

10.3 Erweiterung: Fast disjunkte STS (v)

Zwei $STS(v)$ über derselben Punktmenge V heissen *fast disjunkt,* wenn sie $m \in \mathbb{N}$ Geraden gemeinsam haben. Es gilt also $|B_1 \cap B_2| = m$.

10.4 Problem

Die Menge $J(v)$ aller bei gegebenem v vorkommenden Werte m wurde von C. C. Lindner und A. Rosa 1975 vollständig bestimmt.
P. Müller beschäftigt sich mit einer solchen Mengenbestimmung für den Fall, dass die paarweise disjunkten $STS(v)$ auch noch isomorph sind.

10.5 Erweiterung: Orthogonale STS (v)

Gegeben sind zwei disjunkte Steiner Tripelsysteme S_1 und S_2. Wenn zwei Punktepaare (x, y), (u, v) in S_1 zwei sich schneidende, in S_2 aber zwei sich nicht schneidende Geraden bestimmen, dann heissen S_1 und S_2 *orthogonal.*
Das bedeutet $\{x, y, a\}$, $\{u, v, a\} \in B_1$ mit $a \in V$ und weiter $\{x, y, b\}$, $\{u, v, c\} \in B_2$ mit $b, c \in V$, $b \neq c$.
Für unendlich viele Werte $v = 7 + 6n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ konnten Paare orthogonaler $STS(v)$ konstruiert werden. Im Falle $v = 9$ existiert so etwas überhaupt nicht, während A. Rosa orthogonale $STS(27)$ angegeben hat. Mehr weiss man nicht.
Wie schon bei den in 4.2 angegebenen zwei Konstruktionsverfahren verwendet man für die Untersuchung von Steinersystemen in zunehmendem Masse geometrische Veranschaulichungen. Ja, es werden sogar geometrische Begriffe definiert. Wir geben hier zwei Beispiele solcher Begriffe, nämlich den des Ovals und den der Dimension.

11. Spezielle Punktmengen in *STS (v)*

11.1 Verschiedene Definitionen

Sei $M \subset V$ eine nichtleere Punktmenge. Wir sprechen dann von

- *Bogen,* wenn für alle $g \in B$ gilt $|M \cap g| \in \{0, 1, 2\}$,
- *Vollständigem Bogen,* wenn M ein nicht in einem Bogen grösserer Mächtigkeit enthaltener Bogen ist,
- *Blockierender Menge,* wenn für alle $g \in B$ gilt $|M \cap g| \in \{1, 2\}$,

- *Oval,* wenn M ein Bogen ist und in jedem seiner Punkte genau eine Tangente existiert,
- *Knotenoval, wenn* M ein Oval ist, dessen Tangenten sich in genau einem Punkt (dem Knoten) schneiden,
- *Regulärem Oval,* wenn M ein Oval ist und in jedem Tangentenpunkt, der nicht auf M liegt, genau zwei Tangenten existieren.

11.2 Probleme zu Bögen

Wie gross ist die maximale bzw. die minimale Kardinalität $e_{max}(v)$ *bzw.* $e_{min}(v)$ *vollständiger Bögen in STS* (v)?

Was weiss man?

$e_{max}(v) = \frac{1}{2}(v+1)$ genau dann, wenn $v \in HSTS$, und $e_{max}(v) = \frac{1}{2}(v-1)$ genau dann, wenn $v \in RSTS$. Dabei ist $HSTS$ die Menge aller Steinerzahlen $v = 7, 15 + 12\,n$, $n \in \mathbb{N}_0$, und $RSTS$ die Menge aller übrigen Steinerzahlen, also $v = 9, 13 + 12\,n$, $n \in \mathbb{N}_0$.
Für die minimale Kardinalität kennt man neben einigen Werten für kleine Ordnungen lediglich die Abschätzung $e_{min}(v) \geqq [\sqrt{2v}]$.

11.3 Und die blockierenden Mengen?

In Steiner Tripelsystemen $STS(v)$ gibt es keine blockierenden Mengen.

11.4 Ovalprobleme

11.4.1 Wie steht es mit der Existenz?

Gibt es Steiner Tripelsysteme STS (v) *mit Knotenovalen und solche mit regulären Ovalen?*

Diese Frage wurde im Prinzip beantwortet (H. Lenz, H. Zeitler). Genau für alle $v \in HSTS$ (bzw. für alle $v \in RSTS$) existieren $STS(v)$ mit Knotenovalen (bzw. mit regulären Ovalen). Damit sind die beiden Mengen $HSTS$ und $RSTS$ von Steinerzahlen geometrisch charakterisiert. Auch über die Anzahl von Knotenovalen bzw. regulären Ovalen und eine entsprechende weitere Klassifizierung von Steinerzahlen gibt es bereits einige Teilresultate.

11.4.2 Und andere Ovale?

Gibt es Steiner Tripelsysteme STS (v) *mit anderen – von den Knotenovalen und den regulären Ovalen verschiedenen – Ovalen?*

Es wurden inzwischen einige weitere Ovaltypen gefunden (H. Zeitler). Ovale also mit völlig andersartigen Tangentenkonfigurationen. Eine allgemeine Ovaltheorie aber fehlt – obwohl sie sehr wünschenswert ist (brauchbar vor allem zur Erleichterung der schwierigen Nicht-Isomorphieuntersuchungen).

12. Dimension bei $STS(v)$ – gibt es das?

12.1 Definition

Seien $V_1, V_2, \ldots, V_n \subset V$ die sämtlichen Erzeugendenmengen von V (jede solche Menge V_i „spannt" V auf), dann heisst $d = \min\{|V_i| - 1\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Dimension d von $STS(v)$.

12.2 Probleme

Gibt es $STS(v)$ mit Dimension $d \in \mathbb{N}$? Was lässt sich über die Dimension eines vorliegenden $STS(v)$ sagen und was über die Veränderung der Dimension bei Anwendung rekursiver Verfahren?

$d = 2$

Wenn jedes Dreieck das betreffende System aufspannt, spricht man von einem nichtentarteten zweidimensionalen $STS(v)$. Spannt ein Dreieck das System auf, ein anderes aber nicht, so haben wir ein entartetes zweidimensionales System.
J. Doyen konnte 1969/70 beweisen, dass für alle Steinerzahlen v nichtentartete und für alle Steinerzahlen $v \geqq 15$ auch entartete zweidimensionale $STS(v)$ existieren.

$d = 3$

Dreidimensionale $STS(v)$ gibt es für $v \in \{15, 27, 31, 39\}$ und für alle Steinerzahlen $v \geqq 45$, ausgenommen möglicherweise (!) $v \in \{51, 67, 69, 145\}$.
Daneben finden sich nur kleinere Teilresultate. So bleibt bei Anwendung des Zentralverfahrens die Dimension unverändert oder sie wächst genau um 1, während das Polygonverfahren die Dimension stets auf 2 reduziert (Zeitler).

13. War das schon alles?

Mit diesem doch recht umfangreich geratenen Bericht über Tripelsysteme ist das Thema noch lange nicht ausgeschöpft. Hier stichwortartig einige weitere Themenbereiche:
Planare, unvollständige, zyklische, 2-fache, ... Systeme; vielfältige Verbindungen zur Graphentheorie (chromatische Zahl, chromatischer Index, Ketten (trains), vollständige Ketten, ...); Möglichkeiten des Computereinsatzes; ...

Wir verzichten notgedrungen auf weitere Darstellungen und auch auf spezielle Literaturangaben. Statt dessen nennen wir lediglich einige Übersichtswerke. Sollte ein Leser noch nicht völlig verschreckt sein (hoffentlich gibt es solche!) und gar den Wunsch haben, noch mehr zu erfahren, so sei er auf die ausführliche Bibliographie zur Designtheorie in [3] verwiesen (sie wurde inzwischen auf über 1000 Titel erweitert!). Dort kann er unter den im vorliegenden Text angegebenen Autorennamen genaue Literaturhinweise finden und dann mit dem Studium dieses hochaktuellen, aber auch äusserst interessanten Gebietes beginnen. Viel Vergnügen und viel Erfolg!

H. Zeitler, Math. Institut, Universität Bayreuth

LITERATUR

1 Beth T., Jungnickel J., Lenz H.: Design Theory. Mannheim-Wien-Zürich (1985).
2 Hughes D. R., Piper F. C.: Design Theory. Cambridge (1985).
3 Lindner C. C., Rosa A.: Topics on Steiner Systems. Amsterdam-New York-Oxford (1980).

© 1988 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/88/040097-16$1.50+0.20/0

Periodicity of p-adic continued fractions

A well known theorem of Lagrange states that the simple continued fraction expansion of a real number is periodic if and only if that real number is quadratic irrational. Several authors have tried to establish analogous results for continued fractions of p-adic numbers. The present author [3] showed that such a result is possible if one starts with sequences of approximation lattices of p-adic numbers, instead of continued fractions. We note that from a periodic sequence of approximation lattices of a p-adic number ξ it is easy to construct a periodic continued fraction expansion of ξ.

This process of constructing the continued fraction such that it is periodic, is the reverse of the process in the real case, where one starts by defining the continued fraction, and then tries to prove its periodicity. It would be interesting to obtain periodicity results for a given p-adic continued fraction expansion method, e.g. that introduced by Schneider [2]. Bundschuh [1] remarks that for this type of p-adic continued fractions a periodic continued fraction represents either a rational p-adic number of special type, or a quadratic irrational p-adic number (analogous to Euler's theorem). Further, he gives some numerical evidence indicating that the converse (analogous to Lagrange's theorem) may not be true.

It is the purpose of this note to show that for Schneider's continued fraction algorithm for p-adic numbers, it may indeed happen that quadratic irrational numbers in $\mathbb{Q}_p$ have non-periodic continued fraction expansions. Thus for this type of continued fractions an