Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 43 (1988)
Heft: 3

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 25.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Beweis:

In dem bei D rechtwinkligen Dreieck SDA ist $|SD| = r\cos(\alpha+\varphi)$; in dem bei D rechtwinkligen Dreieck SDC ist $|SC| = |SD|: \cos\alpha$. Somit ist $|SC| = r\cos(\alpha+\varphi): \cos\alpha$.
In dem bei A rechtwinkligen Dreieck SPA ist $|SP| = |SA|: \cos\alpha$. Die Projektion von $|SP|$ auf c ist $|SP|\cos(\alpha+\varphi)$; also ist diese Projektion $r\cos(\alpha+\varphi): \cos\alpha = |SC|$. Deshalb ist der Schnittpunkt C von AE mit c der Fußpunkt des von P auf c gefällten Lotes, somit steht PC senkrecht auf c.

Anmerkung: Weil $\sphericalangle(SCP) = 90°$ ist, kann man C auch als Schnittpunkt des Thales-Kreises über $|SP|$ mit c konstruieren. Das Viereck $SCPA$ ist ein Sehnenviereck mit zwei gegenüberliegenden rechten Winkeln bei A und bei C.

Helmut Sieber, Böblingen

LITERATURVERZEICHNIS

1 Bachmann F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1974.

© 1988 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/88/030086-03$1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 961. Für positive Zahlen x_1, x_2, x_3 sei

$$p_1 := (x_1 + x_2 + x_3)/3, \quad p_2 := (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)/3, \quad p_3 := x_1 x_2 x_3.$$

Dann gilt

$$p_3^2 + 5p_2^3 \geq 6p_1 p_2 p_3$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x_1 = x_2 = x_3$. Dies ist zu zeigen.

V. D. Mascioni, Origlio

Lösung: Setzt man

$$f(x_1, x_2, x_3) = p_3^2 + 5p_2^3 - 6p_1 p_2 p_3,$$

dann ist

$$f(t x_1, t x_2, t x_3) = t^6 f(x_1, x_2, x_3).$$

f ist also homogen in x_1, x_2, x_3 vom Grade 6 und man kann oBdA normieren:

$$x_1 x_2 = 1, \quad x_1 x_3 = 1 + a, \quad x_2 x_3 = 1 + b, \quad 0 \leq a \leq b.$$

Wegen

$$p_3^2 = (1+a)(1+b), \quad p_2 = (3+a+b)/3, \quad p_1 p_3 = ((1+a)+(1+b)+(1+a)(1=b))/3$$

erhält man nach Umformen

$$f(x_1, x_2, x_3) = \tfrac{1}{3}((a-b)^2 + ab) + \frac{a+b}{27}(5(a-b)^2 + 2ab) \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $a = b = 0$, d.h. $x_1 = x_2 = x_3$ gilt.

M. Vowe, Therwil

Bemerkung der Redaktion. O. P. Lossers zeigt allgemeiner:

$$p_3^2 + \beta p_2^3 \geq (\beta + 1) p_1 p_2 p_3 \quad \text{für} \quad \beta \geq 3$$

mit Gleichheit genau für $x_1 = x_2 = x_3$.
Weitere Lösungen sandten S. Arslanagic (Trebinje, YU), P. Bundschuh (Köln, BRD), F. Götze (Jena, DDR), M. Hübner (Leipzig, DDR), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Tsen-Pao Shen (München, BRD), I. Paasche (Stockdorf, BRD; 2 Lösungen), A. Voigt (Karlsruhe, BRD), H. Wellstein (Flensburg, BRD).

Aufgabe 962. Let f, g be nonzero orthogonal elements of $L_2(0,1)$. Show that

$$\frac{\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2}{\int_0^1 (f(x))^2\,dx} + \frac{\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^2}{\int_0^1 (g(x))^2\,dx} \leq 1.$$

I. Mereny, Cluj, Rumänien

Solution: This is a special case of Bessel's inequality: Since $\tilde{f} := f/\|f\|$ and $\tilde{g} := g/\|g\|$ form an orthonormal system and $\int_0^1 e(x)^2\,dx = 1$ for the unit function $e(x) := 1$ we have

$$1 = \|e\|^2 \geq |(e, \tilde{f})|^2 + |(e, \tilde{g})|^2.$$

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Bemerkung der Redaktion. R. Wyss beweist allgemeiner:

$$\frac{\left(\int_a^{a+T} f(x)\,dx\right)^2}{\int_a^{a+T} (f(x))^2\,dx} + \frac{\left(\int_a^{a+T} g(x)\,dx\right)^2}{\int_a^{a+T} (g(x))^2\,dx} \leq \frac{1}{2-T}, \quad 0 < T < 2.$$

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), M. Hübner (Leipzig, DDR), A. A. Jagers (Enschede, NL), Kee-wai Lau (Hong Kong), S. Nanba (Okayama, Japan), H.-J. Seiffert (Berlin), L. Siccha (Berlin), R. Wyss (Flumenthal).

Aufgabe 963.

a) Von n linear angeordneten weissen Kugeln sollen k rot bemalt werden, und zwar derart, dass die roten Kugeln m Blöcke mit je mindestens s Kugeln bilden und dass die roten Blöcke durch Blöcke mit je mindestens t weissen Kugeln getrennt sind. Bestimme die Anzahl solcher Färbungen.

b) Wie a), aber für den Fall, dass die n weissen Kugeln im Kreis angeordnet sind.

J. Binz, Bollingen

Lösung des Aufgabenstellers. Wir benötigen eine einzige Hilfsaussage aus der Schulkombinatorik, nämlich

$$\text{Die Gleichung } x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n \ (x_i \in \mathbb{N}) \text{ hat } \binom{n-1}{k-1} \text{ Lösungen.} \tag{1}$$

a) y_i sei die Anzahl der Kugeln im i-ten roten Block ($i = 1, 2, \ldots, m$); x_0 weisse Kugeln liegen vor dem ersten roten Block, x_i weisse Kugeln zwischen dem i-ten und $(i+1)$-ten roten Block ($i = 1, 2, \ldots, m-1$), und x_m weisse Kugeln folgen auf den letzten roten Block. Bei einer korrekten Färbung müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_m = n - k, \quad x_0 \geq 0, \quad x_1 \geq t, \ldots, x_{m-1} \geq t, \quad x_m \geq 0, \tag{2}$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_m = k, \quad y_i \geq s. \tag{3}$$

Umgekehrt lässt sich aus jeder Lösung $(x_0, y_1, x_1, y_2, \ldots, x_{m-1}, y_m, x_m)$ des Systems (2), (3) eindeutig eine korrekte Färbung konstruieren. Die Gesuchte Anzahl ist somit gleich der Anzahl Lösungen dieses Systems. Mit den Substitutionen $x_0' = x_0 + 1$, $x_m' = x_m + 1$, $x_i' = x_i - t + 1$ ($i = 1, 2, \ldots, m-1$), $y_i' = y_i - s + 1$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) führt man (2) und (3) je auf (1) zurück und erhält so die gesuchte Anzahl

$$x = \binom{n - k - (m-1)(t-1) + 1}{m} \binom{k - m(s-1) - 1}{m-1}.$$

Bemerkungen:

- Für $t = s = 1$ kommt ein bekannter Fall heraus: $\binom{n-k+1}{m}\binom{k-1}{m-1}$ ist die Anzahl derjenigen k-Auswahlen aus n Objekten, die aus genau m Blöcken von Objekten mit aufeinanderfolgenden Nummern bestehen (Einerblöcke zugelassen).
- Ist zusätzlich $m = k$, so entsteht $\binom{n-k+1}{k}$, die Anzahl der k-Auswahlen aus n numerierten Objekten, die keine benachbarten Objekte enthalten.

b) Die erste und die letzte Kugel dürfen jetzt im gleichen Block liegen. Die verschiedenen Unterfälle lassen sich auf den linearen Fall zurückführen.

b1) Die Kugeln 1 und n sind verschiedenfarbig, z. B. n weiss und 1 rot. Solchen Färbungen entsprechen lineare Färbungen mit $x_0 = 0$, $x_m \geq t$. Ihre Anzahl beträgt demnach

$$z_1 = 2\binom{n-k-m(t-1)-1}{m-1}\binom{k-m(s-1)-1}{m-1}.$$

b2) Die Kugeln 1 und n sind beide rot. Die entsprechenden linearen Färbungen bestehen jetzt aus $m+1$ roten Blöcken mit m weissen Zwischenblöcken, ohne weisse Kugel am Anfang und am Ende, aber so, dass die Anzahl der roten Anfangs- und Endkugeln $\geq s$ ist. Aus (3) wird jetzt

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{m+1} = k \quad \text{mit} \quad y_1 \geq 1, \quad y_{m+1} \geq 1, \quad y_1 + y_{m+1} \geq s$$
$$\text{und} \quad y_i \geq s, \quad (i = 2, 3, \ldots, m). \tag{3'}$$

Die Fälle $y_1 = 1, 2, \ldots, s-2$ und $y_1 \geq s-1$ sind getrennt zu behandeln. Wir erhalten

$$z_2 = \binom{n-k-m(t-1)-1}{m-1}\left[(s-2)\binom{k-s-(m-1)(s-1)}{m-1} + \binom{k-s-(m-1)(s-1)+1}{m}\right].$$

Diese Formel liefert auch für $s = 1$ das korrekte Ergebnis.

b3) Die Kugeln 1 und n sind beide weiss. Die entsprechende lineare Färbung hat m rote Blöcke mit je mindestens einer weissen Kugel am Anfang und am Ende, aber so, dass die Anzahl dieser Anfangs- und Endkugeln $\geq t$ ist. Aus (2) wird jetzt

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_m = n - k \quad \text{mit} \quad x_0 \geq 1, \quad x_m \geq 1, \quad x_0 + x_m \geq t$$
$$\text{und} \quad x_i \geq t, \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1). \tag{2'}$$

Diesmal sind $x_0 = 1, 2, \ldots, t-2$ und $x_0 \geq t-1$ getrennt zu behandeln:

$$z_3 = \binom{k-m(s-1)-1}{m-1}\left[(t-2)\binom{n-k-t-(m-1)(t-1)}{m-1} + \binom{n-k-t-(m-1)(t-1)+1}{m}\right].$$

Schliesslich ist die gesuchte Anzahl $z = z_1 + z_2 + z_3$.

Bemerkungen:

– Für $t = s = 1$ kommt $z = \dfrac{n}{n-k}\binom{k-1}{m-1}\binom{n-k}{m}$ heraus, die bekannte Anzahl derjenigen k-Auswahlen aus n numerierten im Kreis angeordneten Objekten, die aus genau

m Blöcken von Objekten mit aufeinanderfolgenden Nummern bestehen (Einerblöcke zugelassen).

– Ist zusätzlich $m = k$, so entsteht $\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$, die Anzahl der k-Auswahlen aus n numerierten im Kreis angeordneten Objekte, die keine benachbarten Objekte enthalten.

Aufgabe 964. Man bestimme alle Paare (a, b) von reellen Zahlen a, b derart, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$a[bn] = b[an].$$

($[x]$ bezeichnet die grösste ganze Zahl $\leq x$.)

W. Janous, Innsbruck, A

Solution: If is clear that $a[bn] = b[an]$ for all natural numbers n if either $ab = 0$, or if $a = b$, or if a and b are both integers. We show that this condition is also necessary. Thus we suppose $a[bn] = b[an]$ for all n, $ab \neq 0$, and $a \neq b$. Then, taking $n = 1$, we have $bm = ak$, where $m = [a]$ and $k = [b]$. Thus $2m \leq 2a < 2m + 2$, so that either $2m \leq 2a < 2m + 1$ or $2m + 1 \leq 2a < 2m + 2$. Similarly, either $2k \leq 2b < 2k + 1$ or $2k + 1 \leq 2b < 2k + 2$. Taking $n = 2$ we conclude that in fact $[2a] = 2m$ and $[2b] = 2k$. (Each of the other possibilities contradicts one of our hypotheses.) Repeating this argument we inductively establish that $[2^r a] = 2^r b$ and $[2^r k] = 2^r k$, so that $m \leq a < m + 1/2^r$ and $k \leq b < k + 1/2^r$ for all natural numbers r. Thus $a = m$ and $b = k$, and our assertion is proven.

J. L. Brenner, Palo Alto, USA
L. L. Foster, Northridge, USA

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Chr. A. Meyer (Bern), H. Müller (Hamburg, BRD), L. Sicha (Berlin), R. Wyss (Flumenthal).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Dezember 1988* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68), Problem 872 A (Band 36, S. 175), Aufgabe 880 (Band 37, S. 93).

Aufgabe 985. Welche Normale eines Kegelschnittes begrenzt zusammen mit dem Kegelschnitt ein Segment minimaler Fläche?

H. Widmer, Rieden

Aufgabe 986. Die Folge (a_n) sei definiert durch

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 8, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n \quad \text{für} \quad n \geq 1.$$

Man berechnet den Wert der Summe

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(a_n + 1) - \ln(a_n - 1)).$$

M. Vowe, Therwil

Aufgabe 987. Man bestimme die kleinste reelle Zahl r und die grösste reelle Zahl s derart, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ gilt:

$$\left(\frac{a+b}{r}\right)^{b-a} < \left(\frac{e}{a}\right)^a \left(\frac{b}{e}\right)^b < \left(\frac{a+b}{s}\right)^{b-a}$$

H. Alzer, Waldbröl, BRD

Aufgabe 988. For $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n > 0$, let $f(t) = I_m(t)/I_n(t)$, where

$$I_p(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2k+p}}{k!\,(k+p)!}$$

is the modified Bessel funktion of the first kind and order p ($p \in \mathbb{N}$). Prove that f is increasing on $(0, \infty)$ with limit 0, if $t \downarrow 0$ and limit 1, if $t \to \infty$.

A. A. Jagers, Enschede, NL

Literaturüberschau

A. T. Fomenko, D. B. Fuchs und V. L. Gutenmacher: Homotopic Topology. 310 Seiten, verschiedene Figuren und Abbildungen, US-$ 33.00. Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest 1986.

Dieses Buch unterscheidet sich von den üblichen Einführungen in die algebraische Topologie, sowohl im Stil wie auch in der Anlage. Aufbauend auf dem Homotopiebegriff werden Überlagerungen und Faserungen studiert, mit vielen geometrischen Beispielen zur Motivation. Anschließend werden singuläre und zelluläre Homologie definiert, mit Anwendungen bis zur Obstruktionstheorie. Dann werden ausführlich Spektralsequenzen und Kohomologieoperationen diskutiert. Der letzte Teil ist ganz der Adams-Spektralreihe gewidmet.

Der Leser wird also von Anfang an mit technisch recht anspruchsvollem Material konfrontiert. Entsprechend tief und schön sind dann auch die Anwendungen. Neben vielen Diagrammen, die den Text ergänzen, ist das Buch mit Graphiken von Fomenko illustriert, der sich auch als Künstler einen Namen gemacht hat. G. Mislin