Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 43 (1988)

Heft: 3

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Kleine Mitteilungen

Ein elementargeometrischer Beweis des Lotensatzes von Hjelmslev

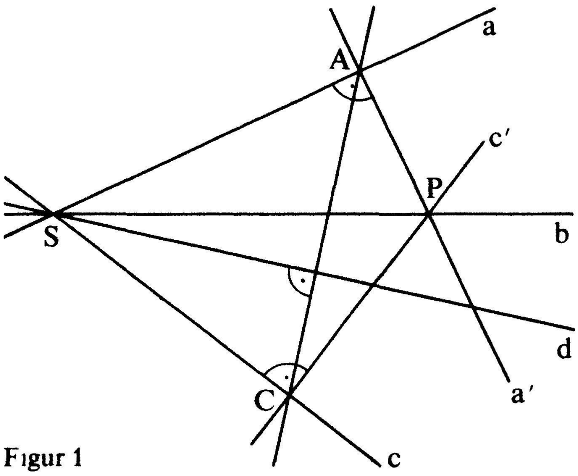
Bachmann hat die ebene metrische (absolute) Geometrie mit Hilfe von Bewegungsgruppen axiomatisch aufgebaut (s. [1] S. 32ff.). In diesem Aufbau spielt die Konstruktion der vierten Büschelgerade d im Büschel a, b, c mit $a \cap b \cap c = \{S\}$ eine wichtige Rolle. Bezeichnet man die Spiegelung an der Geraden g mit S_g, so ist d die Gerade, für die $S_a S_b S_c = S_d$ gilt.
Diese vierte Büschelgerade läßt sich mit Hilfe des Lotensatzes konstruieren, den Hjelmslev als den Fundamentalsatz der ebenen metrischen Geometrie bezeichnet hat (s. [1] S. 42). Im folgenden wird dieser Satz dadurch elementargeometrisch bewiesen, daß man die Konstruktion von d nach dem Lotensatz mit zwei anderen Konstruktionen von d in Beziehung setzt.

Lotensatz

Liegen a, b, c mit $a \cap b \cap c = \{S\}$ im Büschel, wobei $S_a S_b S_c = S_d$ ist, und ist a' Senkrechte auf a in $A \in a$, c' Senkrechte auf c in $C \in c$ und schneiden sich a' und c' in $P \in b$, so liegen a', b, c' genau dann im Büschel, wenn AC senkrecht zu d ist.

Konstruktion von *d*

Mit diesem Satz läßt sich d als das von S auf AC gefällte Lot konstruieren, wenn man in einem beliebigen Punkt $A \in a$, $A \neq S$ die Senkrechte a' auf a errichtet, im Schnittpunkt P von a' mit b das Lot c' auf c fällt und $C \in c$ der Fußpunkt dieses Lotes ist.



Figur 1

Andere Konstruktionen von *d*

1. Konstruktion

Es seien $a \cap b \cap c = \{S\}$, $\sphericalangle(a,b) = \alpha$ und d die Gerade durch S mit $\sphericalangle(c,d) = -\alpha$. Dann ist d die vierte Büschelgerade zu a, b, c für die gilt:

$$S_d = S_a S_b S_c \,.$$

Beweis:

$D_{S,\,2\alpha}$ bedeute die Drehung um S mit Drehwinkel 2α. Aus

$$D_{S,\,2\alpha} D_{S,\,-2\alpha} = Id \Leftrightarrow S_a S_b S_c S_d = Id$$

ergibt sich

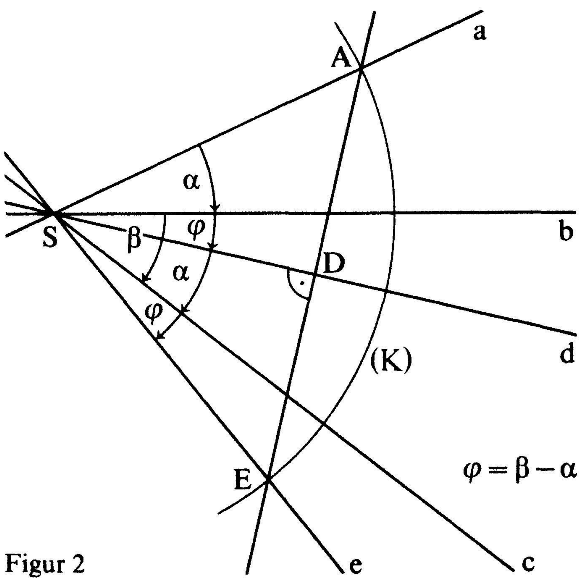
$$S_a S_b S_c S_d S_d = S_d \Leftrightarrow S_a S_b S_c = S_d \,.$$

2. Konstruktion

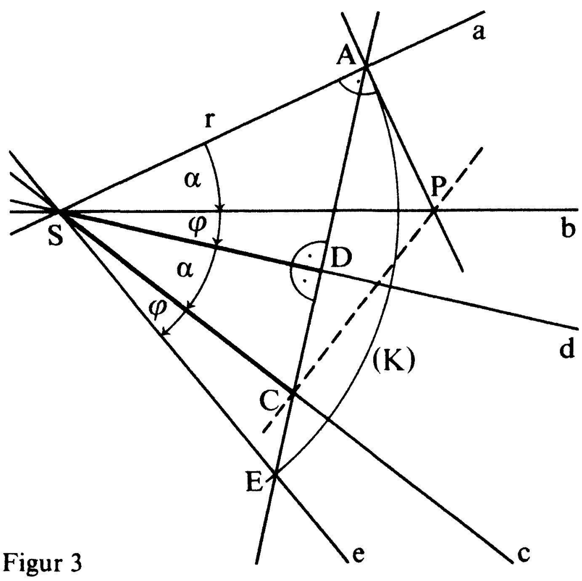
Es seien e die Gerade durch S mit $\sphericalangle(c,e) = \varphi = \beta - \alpha$, $\beta = \sphericalangle(b,c)$, $A \in a$ und $A \neq S$; der Kreis (K) um S mit $r = |SA|$ schneide e in E. Dann ist d die Winkelhalbierende von $\sphericalangle(ASE)$.
Konstruiert man also zunächst den Schnittpunkt E von (K) mit e (e ergibt sich mit Hilfe von $\sphericalangle(c,e) = \sphericalangle(b,c) - \sphericalangle(a,b)$), so erhält man d als das von S auf AE gefällte Lot.

Zusammenhang mit dem Lotensatz

Man zeichnet in Figur 3 die in A auf a senkrecht stehende Gerade a' ein; ihr Schnittpunkt mit b sei P. Der Schnittpunkt von AE mit c heiße C, der Schnittpunkt von AE mit d sei D. Es sei $|SA| = r$.
Um den Lotensatz zu beweisen ist zu zeigen, dass CP senkrecht auf c steht.



Figur 2



Figur 3

Beweis:

In dem bei D rechtwinkligen Dreieck SDA ist $|SD| = r\cos(\alpha+\varphi)$; in dem bei D rechtwinkligen Dreieck SDC ist $|SC| = |SD|: \cos\alpha$. Somit ist $|SC| = r\cos(\alpha+\varphi): \cos\alpha$.
In dem bei A rechtwinkligen Dreieck SPA ist $|SP| = |SA|: \cos\alpha$. Die Projektion von $|SP|$ auf c ist $|SP|\cos(\alpha+\varphi)$; also ist diese Projektion $r\cos(\alpha+\varphi): \cos\alpha = |SC|$. Deshalb ist der Schnittpunkt C von AE mit c der Fußpunkt des von P auf c gefällten Lotes, somit steht PC senkrecht auf c.

Anmerkung: Weil $\sphericalangle(SCP) = 90°$ ist, kann man C auch als Schnittpunkt des Thales-Kreises über $|SP|$ mit c konstruieren. Das Viereck $SCPA$ ist ein Sehnenviereck mit zwei gegenüberliegenden rechten Winkeln bei A und bei C.

Helmut Sieber, Böblingen

LITERATURVERZEICHNIS

1 Bachmann F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1974.

© 1988 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/88/030086-03$1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 961. Für positive Zahlen x_1, x_2, x_3 sei

$$p_1 := (x_1 + x_2 + x_3)/3, \quad p_2 := (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)/3, \quad p_3 := x_1 x_2 x_3.$$

Dann gilt

$$p_3^2 + 5p_2^3 \geq 6p_1 p_2 p_3$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x_1 = x_2 = x_3$. Dies ist zu zeigen.

V. D. Mascioni, Origlio

Lösung: Setzt man

$$f(x_1, x_2, x_3) = p_3^2 + 5p_2^3 - 6p_1 p_2 p_3,$$

dann ist

$$f(tx_1, tx_2, tx_3) = t^6 f(x_1, x_2, x_3).$$

f ist also homogen in x_1, x_2, x_3 vom Grade 6 und man kann oBdA normieren:

$$x_1 x_2 = 1, \quad x_1 x_3 = 1 + a, \quad x_2 x_3 = 1 + b, \quad 0 \leq a \leq b.$$