Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 43 (1988)
Heft: 3

Artikel: Fastpythagoräische Quadrupel
Autor: Binz, J.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40805

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

3 Grünert I. A.: Wenn $n > 1$, so gibt es unter den ganzen Zahlen von 1 bis n nicht zwei Werte von x und y, für welche wenn z einen ganzen Wert bezeichnet, $x^n + y^n = z^n$ ist. Archiv. Math. Phys. *27*, 119–120 (1856).
4 Meres L.: About certain inequalities connected with the great theorem of Fermat. Zeszyt. Nauk. Polit. Śląskiej 560 Mat.-Fiz. *30*, 215–218 (1979).
5 Perisastri M.: On Fermat's last theorem. Amer. Math. Monthly *76*, 671–675 (1969).
6 Ribenboim P.: 13 lectures on Fermat's last theorem. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1980.
7 Towes G.: On Fermat's last theorem. Amer. Math. Monthly *41*, 419–424 (1934).
8 Zeitlin D.: A note on Fermat's last theorem. Fibonacci Quart. *12*, 368–402 (1974).

© 1988 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/88/030078-06$1.50+0.20/0

Fastpythagoräische Quadrupel

1. In [1] beschreibt O. Frink Methoden, alle Lösungen der diophantischen Gleichungen $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ und $x^2 + y^2 = z^2 - 1$ zu finden. Wir lösen mit anderen Methoden das analoge Problem für vier Variable. Ein Quadrupel (x, y, z, w) natürlicher Zahlen heisse *fastpythagoräisch* (FPQ), wenn es eine der beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = w^2 + 1 \tag{1}$$

oder

$$x^2 + y^2 + z^2 = w^2 - 1 \tag{2}$$

erfüllt. Gesucht ist ein Verfahren zur Bestimmung aller FPQ. Wir betrachten Lösungen, die nur durch Vertauschung von Komponenten auseinander hervorgehen, als nicht wesentlich verschieden.

2. Wir lösen zuerst (1). Rechnet man modulo 4, so erkennt man, dass x, y, z nicht alle gerade und nicht alle ungerade sein können.

Fall 1: x, y, w gerade, z ungerade. Der Ansatz $(x, y, z, w) = (2a, 2b, 2c - 1, 2c + 2r)$ führt auf

$$c = \frac{a^2 + b^2 - r^2}{2r + 1}.$$

Für jede Wahl von a, b, r mit den Nebenbedingungen $a \leq b$, $r \geq 0$, $r^2 < a^2 + b^2$ und $2r + 1 \mid a^2 + b^2 - r^2$ erhält man genau ein FPQ, wie man durch Einsetzen in (1) bestätigt. Für $r = 0$ ergibt sich so die Schar $(2a, 2b, 2a^2 + 2b^2 - 1, 2a^2 + 2b^2)$. $(2, 6, 5, 8)$ ist das FPQ mit kleinstem w, das nicht zu dieser Schar gehört. Ist $(a, b, r + 1)$ ein pythagoräisches Tripel, so entsteht das triviale FPQ $(2a, 2b, 1, 2r + 2)$. Weitere FPQ finden sich in Tabelle 1 am Schluss dieser Note.

Fall 2: x gerade, y, z, w ungerade. Diesmal setzen wir

$$(x, y, z, w) = (2a, 2b - 1, 2c - 1, 2c - 1 + 2r)$$

an und berechnen

$$c = \frac{a^2 + b(b-1) - r(r-1)}{2r};$$

offenbar muss a gerade sein. Mit $a = 2e$ wird

$$c = \frac{4e^2 + b(b-1) - r(r-1)}{2r}.$$

Diesmal sind e und b beliebig wählbar; $r \geq 1$ muss die Bedingung

$$2r \mid 4e^2 + b(b-1) - r(r-1)$$

erfüllen und so klein gewählt werden, dass $c \geq b$ ausfällt (die letzte Bedingung ist bei $r = 1$ stets erfüllt).
Für $r = 1$ ergibt sich so die Schar $(4e, 2b - 1, 4e^2 + b(b-1) - 1, 4e^2 + b(b-1) + 1)$. $(8, 3, 3, 9)$ ist das kleinste FPQ, das nicht zu dieser Schar gehört. Für $b = 1$ entstehen triviale FPQ $\left(4e, 1, \frac{4e^2 - r^2}{r}, \frac{4e^2 + r^2}{r}\right)$, in denen die erste, dritte und vierte Komponente ein pythagoräisches Tripel bilden. Weitere FPQ sind in Tabelle 2 zu finden.

3. Die Gleichung (2) lässt sich analog behandeln. Diesmal müssen x, y, z alle gerade oder alle ungerade sein.

Fall 1. Mit $(x, y, z, w) = (2a, 2b, 2c, 2c - 1 + 2r)$ kommt man zu

$$c = \frac{a^2 + b^2 - r(r-1)}{2r - 1}.$$

FPQ kommen heraus, wenn man a beliebig und $b \geq a$ wählt, und dann $r \geq 1$ mit $2r - 1 \mid a^2 + b^2 - r(r-1)$ so klein wählt, dass $c \geq b$ ausfällt.
Für $r = 1$ ergeben sich die FPQ $(2a, 2b, 2a^2 + 2b^2, 2a^2 + 2b^2 + 1)$. Die kleinsten nicht in dieser Schar auftretenden FPQ sind $(4, 4, 4, 7)$ und $(2, 8, 10, 13)$. Für weitere Beispiele siehe Tabelle 3.

Fall 2: Jetzt führt $(x, y, z, w) = (2a - 1, 2b - 1, 2c - 1, 2c + 2r)$ auf

$$c = \frac{a(a-1) + b(b-1) + 1 - r^2}{2r + 1}.$$

FPQ entstehen, wenn man a beliebig und $b \geq a$ wählt, und dann $r \geq 0$ mit $2r + 1 \mid a(a-1) + b(b-1) + 1 - r^2$ so klein wählt, dass $b \geq c$ ausfällt. Dies geht

Tabelle 1.
$x^2 + y^2 + z^2 = w^2 + 1$,
x, y gerade, z ungerade.

x	y	z	w
2	2	3	4
2	4	9	10
2	6	19	20
2	6	5	9
...			
4	4	15	16
4	6	25	26
4	6	7	10
...			
6	6	35	36
...			

Tabelle 2.
$x^2 + y^2 + z^2 = w^2 + 1$,
x gerade, y, z ungerade.

x	y	z	w
4	1	3	5
4	3	5	7
4	5	9	11
4	7	15	17
...			
8	1	15	17
8	3	17	19
8	3	7	11
8	3	3	9
...			

Tabelle 3.
$x^2 + y^2 + z^2 = w^2 - 1$,
x, y, z gerade.

x	y	z	w
2	2	4	5
2	4	10	11
2	6	20	21
2	8	34	35
2	8	10	13
...			
4	4	16	17
4	4	4	7
4	6	26	27
...			

Tabelle 4.
$x^2 + y^2 + z^2 = w^2 - 1$,
x, y, z ungerade.

x	y	z	w
1	1	1	2
1	3	5	6
1	5	13	14
1	7	25	26
1	7	7	10
...			
3	3	9	10
3	5	17	18
3	7	29	30
...			

sicher für $r = 0$, was die Schar

$$(2a - 1, 2b - 1, 2a(a - 1) + 2b(b - 1) + 1, 2a(a - 1) + 2b(b - 1) + 2)$$

liefert. Das kleinste FPQ, das in ihr nicht vorkommt, ist $(1, 7, 7, 10)$. Weitere FPQ siehe Tabelle 4.

4. Das beschriebene Lösungsverfahren liefert alle FPQ. Die präzise formulierten und deshalb etwas kompliziert aussehenden Nebenbedingungen bewirken, dass jedes FPQ genau einmal vorkommt. In den Tabellen sind für jeden der 4 Fälle die kleinsten FPQ dargestellt.

J. Binz, Mathematisches Institut der Universität Bern

LITERATURVERZEICHNIS

1 Frink O.: Almost Pythagorean Triples. Math. Mag. *60*, 234–236 (1987).

© 1988 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/88/030053-03$1.50+0.20/0