Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 43 (1988)
Heft: 2

Artikel: Über Lehmers Mittelwertfamilie
Autor: Alzer, Horst
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40801

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

REFERENCES

1 G. Birman and K. Nomizu: Trigonometry in Lorentzian geometry. Amer. Math. Monthly, vol. 91, No. 9, Nov. 1984.
2 L. K. Graves: Codimension one isometric immersions between Lorentz spaces. Transaction of the A.M.S., vol. 252, 1979.
3 R. K. Sach and H. Wu: General relativity for mathematicians. Springer, New York, 1977.

© 1988 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/88/020046-05 $ 1.50 + 0.20/0

Über Lehmers Mittelwertfamilie

Gegenstand dieser Note ist die für positive x und y sowie für reelle Parameter r definierte Mittelwertfamilie

$$L_r(x, y) = \frac{x^{r+1} + y^{r+1}}{x^r + y^r},$$

die die drei klassischen Mittelwerte:

das arithmetische Mittel: $L_0(x, y) = \dfrac{x+y}{2}$,

das geometrische Mittel: $L_{-1/2}(x, y) = \sqrt{xy}$ und

das harmonische Mittel: $L_{-1}(x, y) = \dfrac{2xy}{x+y}$

enthält. Von H. W. Gould und M. E. Mays [4] ist für L_r die Bezeichnung Lehmer Mittel gewählt worden. Zahlreiche interessante Eigenschaften von L_r findet man in [1–4], [8]. Die einparametrige Funktionenschar $L_r(x, y)$ ist ein Spezialfall der im Jahre 1938 von C. Gini [3] für positive $x_1, \ldots, x_n$ sowie für reelle Parameter r und s eingeführten Mittelwertfamilie

$$G(r, s; x_1, \ldots, x_n) = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^r \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i^s\right]^{1/(r-s)} \quad \text{für} \quad r \neq s,$$

$$G(r, r; x_1, \ldots, x_n) = \exp\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^r \log(x_i) \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i^r\right].$$

Bemerkenswert ist eine vor kurzem von D. Farnsworth und R. Orr [2] veröffentlichte Note über Gini Mittel, in der unter anderem gezeigt wird, wie sich das Lehmer Mittel

$L_r(x, y) = G(r+1, r; x, y)$ für ganzzahlige Parameter r geometrisch interpretieren lässt.
Unser Ziel ist es, einige neue Ungleichungen für L_r zu beweisen. Wir beginnen mit dem Beweis zweier Hilfssätze. Zunächst zeigen wir, in welchen Intervallen die Funktionen $L_r(x, y)$ und $\log L_r(x, y)$ bezüglich r konvex bzw. konkav sind.

Lemma 1. Wenn x und y positive Zahlen sind mit $x \neq y$, dann ist die Funktion $L(r) = L_r(x, y)$ in $\mathbb{R}_0^-$ streng konvex und in $\mathbb{R}_0^+$ streng konkav sowie in $(-\infty, -1/2]$ logarithmisch streng konvex und in $[-1/2, \infty)$ logarithmisch streng konkav.

Beweis. 1. Zweimalige Differentiation von L ergibt:

$$L''(r) = \frac{(x\,y)^r (\log x/y)^2}{(x^r + y^r)^3} (y - x)(x^r - y^r).$$

Hieraus folgt:

$$L''(r) > 0 \quad \text{für} \quad r < 0 \qquad \text{und}$$

$$L''(r) < 0 \quad \text{für} \quad r > 0.$$

2. Wir bezeichnen mit f die Funktion

$$f(r) = \log L_r(x, y).$$

Dann folgt nach einigen einfachen Rechnungen:

$$f''(r) = \frac{(x\,y)^r (\log x/y)^2}{(x^r + y^r)^2 (x^{r+1} + y^{r+1})^2} (y - x)(x^{2r+1} - y^{2r+1});$$

somit erhalten wir:

$$f''(r) > 0 \quad \text{für} \quad r < -1/2$$

und

$$f''(r) < 0 \quad \text{für} \quad r > -1/2. \quad \square$$

Weiter benötigen wir folgenden (bekannten) Satz über konvexe Funktionen (vgl. [9, p. 16]):

Lemma 2. Wenn $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine streng konvexe Funktion ist, dann gilt für alle $r, s, t \in I$ mit $r < s < t$:

$$(t - s) f(r) + (r - t) f(s) + (s - r) f(t) > 0. \tag{1}$$

Beweis. Da f in I streng konvex ist, gilt für alle reellen $a \in (0, 1)$:

$$f(ar + (1-a)\,t) < af(r) + (1-a)\,f(t)\,. \tag{2}$$

Wenn wir in (2) $s = ar + (1-a)\,t$ einsetzen und anschliessend beide Seiten von (2) mit $t - r$ multiplizieren, dann folgt (1). □

Wir setzen nun $x \neq y$ voraus; nach Lemma 1 erfüllen die vier Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(r) &= L_r(x,y) && \text{in } \mathbb{R}_0^-, \\ f_2(r) &= -L_r(x,y) && \text{in } \mathbb{R}_0^+, \\ g_1(r) &= \log L_r(x,y) && \text{in } (-\infty, -1/2] \quad \text{und} \\ g_2(r) &= -\log L_r(x,y) && \text{in } [-1/2, \infty) \end{aligned}$$

die Voraussetzungen von Lemma 2. Somit gilt:

Satz 1. Es seien r, s und t reelle Zahlen sowie x und y positive Zahlen. Wenn $r < s < t \leqq 0$, dann gilt:

$$(t-s)\,L_r(x,y) + (r-t)\,L_s(x,y) + (s-r)\,L_t(x,y) \geqq 0\,. \tag{3}$$

Falls $0 \leqq r < s < t$, dann muß in (3) das Zeichen „$\geqq$" durch „$\leqq$" ersetzt werden.
Wenn $r < s < t \leqq -1/2$, dann gilt:

$$[L_r(x,y)]^{t-s}\,[L_s(x,y)]^{r-t}\,[L_t(x,y)]^{s-r} \geqq 1\,. \tag{4}$$

Falls $-1/2 \leqq r < s < t$, dann muß in (4) das Zeichen „$\geqq$" durch „$\leqq$" ersetzt werden.
In allen Fällen gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $x = y$.

Abschließend wollen wir ein Gegenstück zu Satz 1 beweisen. Hierzu benötigen wir eine Ungleichung, die von E. M. Wright [11] im Jahre 1956 veröffentlicht wurde:

Lemma 3. Wenn $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}^+$ eine monotone oder konvexe Funktion ist, dann gilt für alle Zahlen $r, s, t \in I$ die Ungleichung

$$(r-s)(r-t)\,f(r) + (s-r)(s-t)\,f(s) + (t-r)(t-s)\,f(t) \geqq 0\,. \tag{5}$$

Das Gleichheitszeichen gilt in (5) genau dann, wenn $r = s = t$.

Auf Grund von

$$\frac{d}{dr}\,L_r(x,y) = \frac{(x\,y)^r \log(x/y)\,(x-y)}{(x^r + y^r)^2} \geqq 0$$

ist $L_r(x,y)$ und folglich auch $\log L_r(x,y)$ bezüglich r in $\mathbb{R}$ monoton steigend. Vgl. [1].

Weiter gilt:
Wenn $x, y \geqq 1$, $x \neq y$ (bzw. $0 < x, y \leqq 1$, $x \neq y$), dann $L_r(x, y) > 1$ (bzw. $L_r(x, y) < 1$); wenn $0 < y < 1 < x$ oder $0 < x < 1 < y$, dann

$$L_r(x, y) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad r > \log \frac{1-y}{x-1} \Big/ \log \frac{x}{y}.$$

Somit erfüllen die Funktionen

$$f(r) = L_r(x, y) \quad \text{in } \mathbb{R},$$

$$g_1(r) = \log L_r(x, r) \quad (\text{mit } x, y \geqq 1, x \neq y) \quad \text{in } \mathbb{R},$$

$$g_1(r) = \log L_r(x, y) \quad (\text{mit } 0 < y < 1 < x \text{ oder } 0 < x < 1 < y)$$

$$\text{im Intervall } \left(\log \frac{1-y}{x-1} \Big/ \log \frac{x}{y}, \infty \right)$$

und

$$g_2(r) = -\log L_r(x, y) \quad (\text{mit } 0 < x, y \leqq 1, x \neq y) \quad \text{in } \mathbb{R}$$

die Voraussetzungen von Lemma 3 und wir erhalten:

Satz 2. Es seien r, s und t reelle Zahlen sowie x und y positive reelle Zahlen. Dann gilt:

$$(r-s)(r-t)\, L_r(x, y) + (s-r)(s-t)\, L_s(x, y) + (t-r)(t-s)\, L_t(x, y) \geqq 0.$$

Wenn $x, y \geqq 1$, $x \neq y$, dann gilt:

$$[L_r(x, y)]^{(r-s)(r-t)} [L_s(x, y)]^{(s-r)(s-t)} [L_t(x, y)]^{(t-r)(t-s)} \geqq 1. \tag{6}$$

Wenn $0 < y < 1 < x$ oder $0 < x < 1 < y$, dann gilt (6), falls

$$\min(r, s, t) > \log \frac{1-y}{x-1} \Big/ \log \frac{x}{y}.$$

Wenn $0 < x, y \leqq 1$, $x \neq y$, dann muß in (6) das Zeichen „$\geqq$" durch „$\leqq$" ersetzt werden. Das Gleichheitszeichen gilt in allen Fällen genau dann, wenn $r = s = t$.

Bemerkung. Die von K. B. Stolarsky [10] für positive x und y (mit $x \neq y$) und für reelle Parameter r und s (mit $r \neq s$, $rs \neq 0$) definierte Mittelwertfamilie

$$E(r, s; x, y) = \left[\frac{r}{s} \frac{x^s - y^s}{x^r - y^r} \right]^{1/(s-r)}$$

steht auf Grund von

$$G(r, s; x, y) = [E(2r, 2s; x, y)]^2 / E(r, s; x, y)$$

in Beziehung zu Ginis Mittelwertfamilie G.

Zahlreiche Eigenschaften von E findet man in [5–7], [10] und in der dort zitierten Literatur.
Gould und Mays [4] haben gezeigt, dass die einzigen Mittelwerte, die sowohl $E(r, s; x, y)$ als auch $L_r(x, y)$ angehören, das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel von x und y sind.

Der Redaktion möchte ich für Verbesserungsvorschläge herzlich danken.

Horst Alzer, Waldbröl

LITERATUR

1 E. F. Beckenbach: A class of mean value functions. Amer. Math. Monthly *57*, 1–6 (1950).
2 D. Farnsworth and R. Orr: Gini means. Amer. Math. Monthly *93*, 603–607 (1986).
3 C. Gini: Di una formula comprensiva delle medie. Metron *13*, 3–22 (1938).
4 H. W. Gould and M. E. Mays: Series expansions of means. J. Math. Anal. Appl. *101*, 611–621 (1984).
5 E. B. Leach and M. C. Sholander: Extended mean values. Amer. Math. Monthly *85*, 84–90 (1978).
6 E. B. Leach and M. C. Sholander: Extended mean values II. J. Math. Anal. Appl. *92*, 207–223 (1983).
7 E. B. Leach and M. C. Sholander: Multi-variable extended mean values. J. Math. Anal. Appl. *104*, 390–407 (1984).
8 D. H. Lehmer: On the compounding of certain means. J. Math. Anal. Appl. *36*, 183–200 (1971).
9 D. S. Mitrinović: Analytic Inequalitites. Springer Verlag. Berlin 1970.
10 K. B. Stolarsky: Generalizations of the logarithmic mean. Math. Mag. *48*, 87–92 (1975).
11 E. M. Wright: A generalization of Schur's inequality. Math. Gaz. *40*, 217 (1956).

© 1988 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/88/020050-05 $ 1.50+0.20/0

Kleine Mitteilung

Sums of a certain family of series

By identifying the sum

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{2^k (n+k+1)} \quad (n \in \mathcal{N} = \{1, 2, 3, \dots\}) \tag{1}$$

with the integral

$$S_n = \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{n-1} t^n \, dt, \tag{2}$$

and evaluating this Eulerian integral, M. Vowe and H.-J. Seiffert [3] have recently shown that

$$S_n = \frac{2^n (n-1)!\, n!}{(2n)!} - \frac{2^{-n}}{n} \quad (n \in \mathcal{N}). \tag{3}$$