

# Über Rösselringe auf dem Brett von $6^2$ Zellen

Autor(en): **Hofmann, J.E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **43 (1988)**

Heft 1

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-40795>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Vol. 43

Nr. 1

Seiten 1–32

Basel, Januar 1988

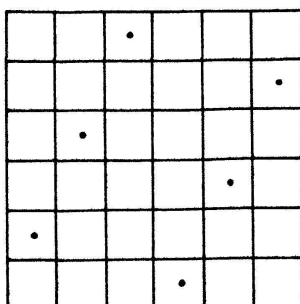
## Über Rösselringe auf dem Brett von $6^2$ Zellen

**Vorbemerkung von C. J. Scriba**

Das folgende Manuskript wird jetzt aus dem Nachlass des 1973 verstorbenen Mathematikhistorikers Joseph Ehrenfried Hofmann herausgegeben. Zum Zeitpunkt seines Todes war nicht klar, ob er es bereits bei einer Zeitschrift eingereicht hatte. Soweit eine Durchsicht des «Zentralblatts für Mathematik» und der «Mathematical Reviews» ergab, ist bisher keine Publikation erfolgt. Lediglich ein kurzer Auszug erschien 1974 (unter dem gleichen Titel) in der Zeitschrift «Praxis der Mathematik» 16, 91–92.

### 1. Einleitung

Bekanntlich nimmt das Zahlenquadrat mit  $6^2$  Zellen unter den quadratischen Matrizen eine Sonderstellung ein: es lässt sich nicht orthogonal aus zwei «lateinischen» Quadraten mit verschiedenen Zahlen besetzen [1\*]. Wohl aber kann man auf ihm das «Damenproblem» lösen: auf einem solchen Quadrat gibt es genau einen Typus der Verteilung von 6 Damen im Sinne des Schachspiels, so dass sich deren keine zwei schlagen (Fig. 1). Diese Damenfigur führt durch Drehen und Spiegeln auf  $4 \times 6 = 24$  «Damenfelder», deren keines auf eines der verbleibenden «Diagonalfelder» fällt. Ausserdem kann man auf mannigfache Weise geschlossene 36-teilige Rösselsprünge, sog. Rösselringe, auf dem Quadrat ermitteln [2\*], und unter ihnen befinden sich auch solche, bei denen die Reise stets von einem Diagonalfeld über zwei Damenfelder wieder zu einem Diagonalfeld führt. Ich wende mich zunächst zu diesem «speziellen Rösselsprungproblem».



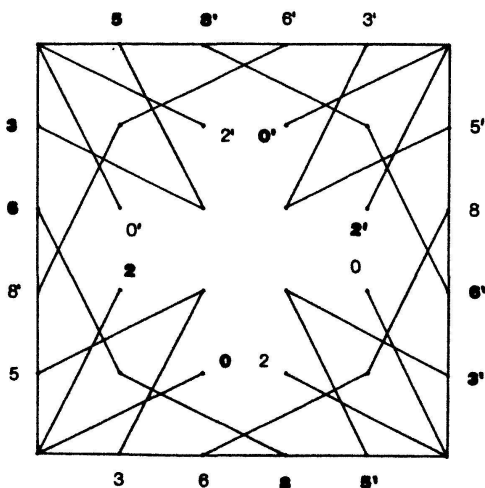
Figur 1. Zum Damenproblem.

### 2. Vom speziellen Rösselsprungproblem

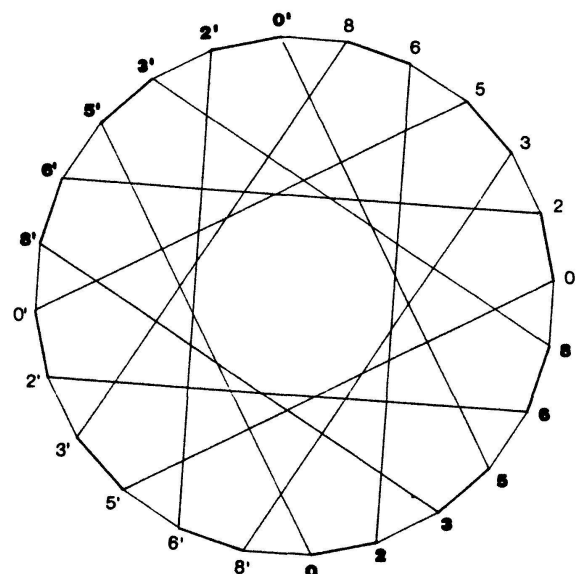
Um der besseren Verständigung willen kennzeichne ich die Felder des  $6^2$ -Bretts durch Ziffern (Fig. 2), deren zweckmässige Wahl sich erst aus dem folgenden ergeben wird. Gehen wir nun zu einem Rösselsprung über, dann ist es günstiger, anstelle der Felder Punkte treten zu lassen und die Sprünge durch Verbindungsgerade dieser Punkte zu kennzeichnen. Figur 3 zeigt 12 Doppelsprünge auf dem Brett, dadurch festgelegt, dass von jedem Diagonalfeld aus je zwei Sprünge gemacht werden. Die 24 Endpunkte dieser Doppelsprünge ordnen wir (Fig. 4) den Eckpunkten eines regelmässigen 24-Ecks zu; weitere mögliche Einzelsprünge zwischen den gemeinten 24 Brettfeldern werden durch die Verbindungsgeraden der entsprechenden Bildpunkte gekennzeichnet. So entsteht das «Netz», das der Gesamtheit der bereits festgehaltenen und der noch möglichen Rösselsprünge auf dem Brett entspricht. Jede Rundreise auf den Netzlinien, bei der jeder «Knoten» genau einmal berührt wird und die nach Beendigung wieder zum Ausgangspunkt zurückführt, gibt eine Lösung des Problems. Der einfachste Fall (a) – er gehört in der Symbolik des Abschnitts 5 zum Paar AA – ist durch die Ziffernfolge **0 2 3 5 6 8 0 2 3 5 6 8 0' 2' 3' 5' 6' 8' 0' 2' 3' 5' 6' 8'** gekennzeichnet und lässt nunmehr die Zweckmässigkeit der Felder- und Punktbezeichnung erkennen.

1'	5	8'	6'	3'	1'
3	7'	2'	0'	7'	5'
6	0'	4	4'	2'	8
8'	2	4	4'	0	6'
5	7	0	2	7	3'
1	3	6	8	5'	1

Figur 2. Die Kennziffern im Quadrat.



Figur 3. Die speziellen Doppelsprünge.



Figur 4. Das zum speziellen Rösselsprungproblem gehörige Netz.

Kennzeichnen wir die in diesem 36-teiligen Rösselring aufeinanderfolgend berührten Felder durch die Zahlen von 1 bis 36, vielleicht beginnend mit dem durch 0 gekennzeichneten Feld und von dort nach 1 weiterschreitend, dann erhalten wir eine zweckmässige Bezeichnung im Brett. Schreiben wir jedoch diese Zahlen im Sechser-system von 11 bis 66, dann findet sich jede der 6 möglichen Endziffern genau einmal in jeder Zeile und Spalte; in den Feldern der beiden Diagonalen steht immer die gleiche Ziffer. Figur 5 zeigt diese Verteilung; anstelle der Ziffern sind Buchstaben verwendet, um anzudeuten, dass die Ziffernfolge im Zyklus 1, 2, 3, ..., 6 beliebig verschoben werden kann.

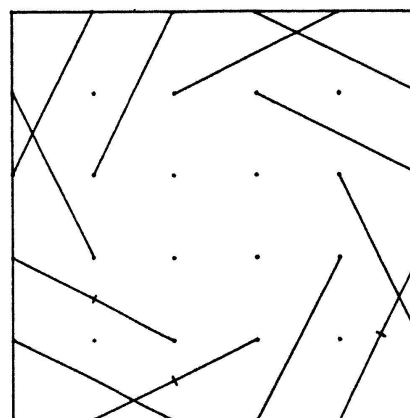
Besonders übersichtlich wird die Figur auf dem Brett, wenn wir nur die eingeschalteten Rösselsprünge notieren wie in Fig. 6. Sie kann z. B. dadurch erzeugt werden, dass die 3 in dieser Figur durch Querstriche gekennzeichneten sich nicht überschneidenden Strecken verschiedener Richtung um den Mittelpunkt des Quadrats im Gegen- uhrzeigersinn um Vielfache von 90° gedreht werden. Der zugehörige Rösselsprung ist also «drehsymmetrisch». Ausserdem ist er jedoch auch zentrisch symmetrisch zum Quadratmittelpunkt.

Eine längere Auszählung, deren Einzelheiten ich hier nicht vorführen will, führt auf die folgenden 6 voneinander verschieden aussehenden Rösselringe der geforderten Art. Sie sind in den Netzen der Fig. 7 einander gegenübergestellt.

Die Wiedergabe der verbleibenden Springerzüge in Entsprechung zu Fig. 6 lässt erkennen, dass (a) und (ā) drehsymmetrisch und daher auch zentrisch symmetrisch sind (vgl. Fig. 8); diese Rösselringe gehen ineinander sowohl bei Spiegeln an der waagerechten wie an der senkrechten Mittelparallelen des Quadrats über. Weniger stark spezialisiert sind die durch (c) und (c̄) gekennzeichneten Rösselringe. Sie gehen nur durch Spiegeln an der senkrechten Mittelparallelen des Quadrats ineinander über. Von anderer Art sind die Rösselringe (b) und (b̄); sie gehen durch Spiegeln an der Diagonalen von links unten nach rechts oben ineinander über. Wir haben also im Grunde nur drei wesentlich voneinander verschiedene Rösselringe gewonnen, die aus Fig. 3 durch Ergänzen hervorgehen; denn Rösselringe, die durch Drehen oder Spiegeln ineinander übergeführt werden können, sehen wir natürlich nicht als wesentlich voneinander verschieden an.

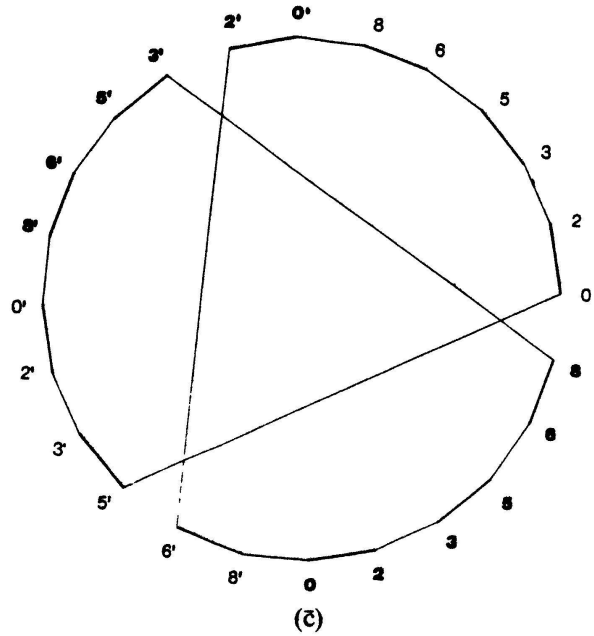
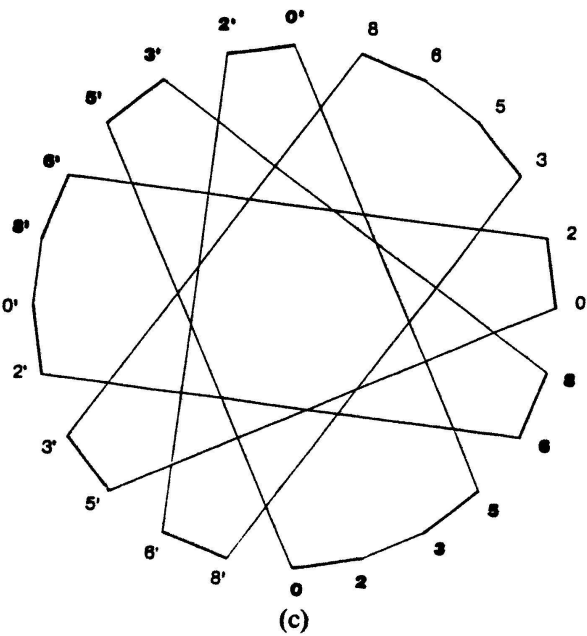
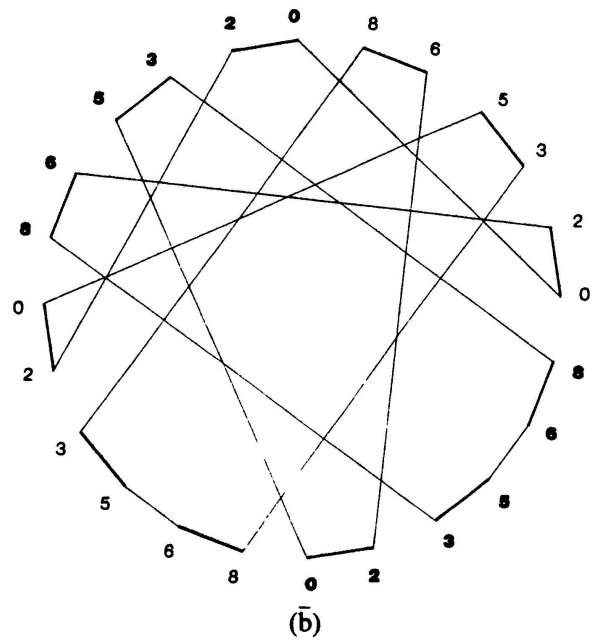
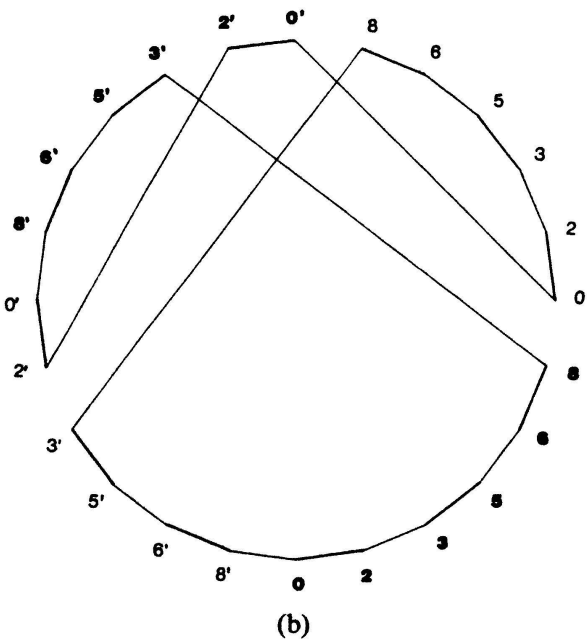
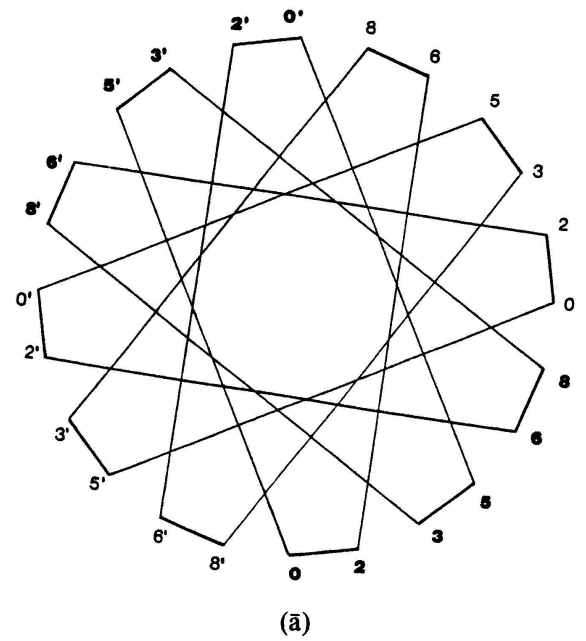
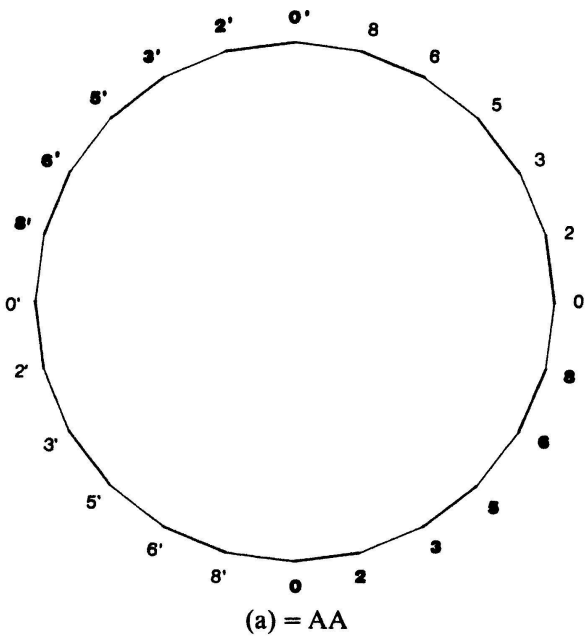
d	c	f	e	b	a
e	d	c	b	a	f
b	e	d	a	f	c
c	f	a	d	e	b
f	a	b	c	d	e
a	b	e	f	c	d

Figur 5. Endziffern zu (a) im Sechser-system.

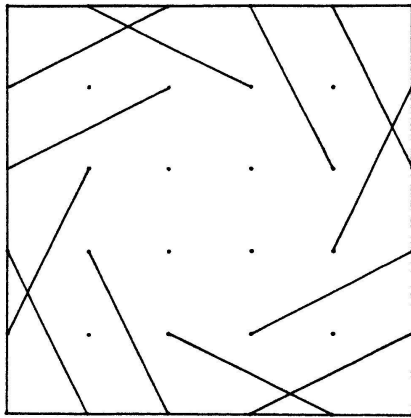


Figur 6. Verkürzte Kennzeichnung des Rösselrings (a).

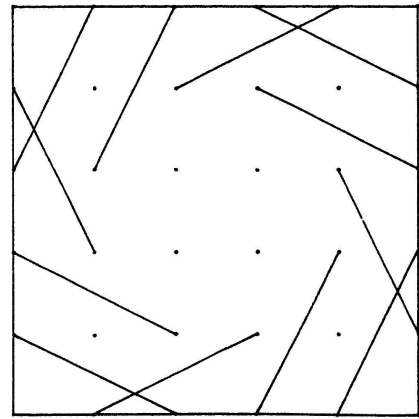




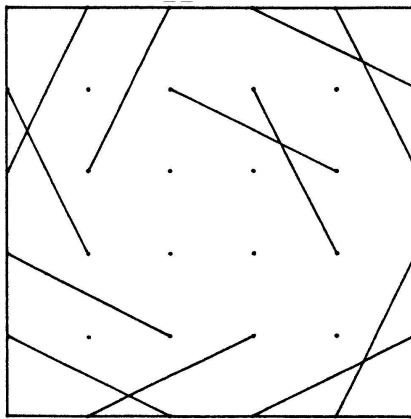
Figur 7. Die 6 Rösselringe des speziellen Problems im Netz.



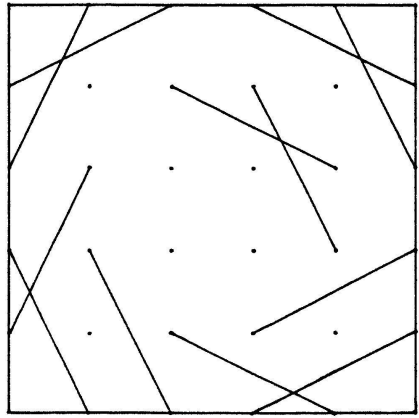
(a)



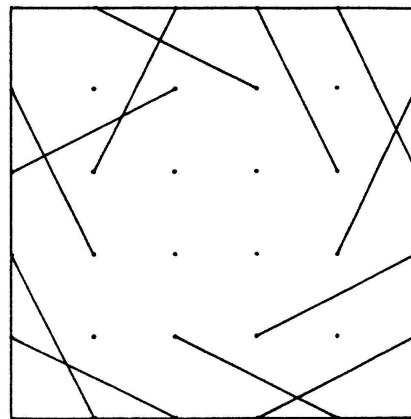
(ā)



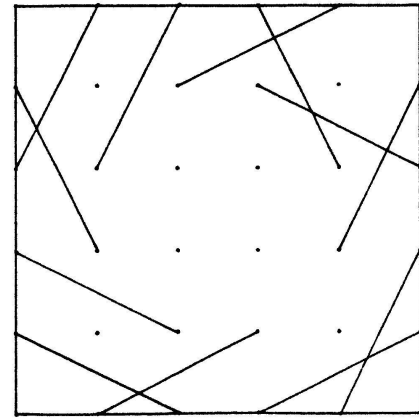
(b)



(b̄)

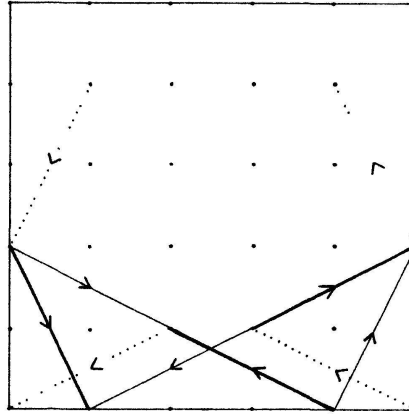


(c)



(c̄)

Figur 8. Verkürzte Kennzeichnung der Rösselringe des speziellen Problems.



Figur 9. Das geometrische Umformungsverfahren.

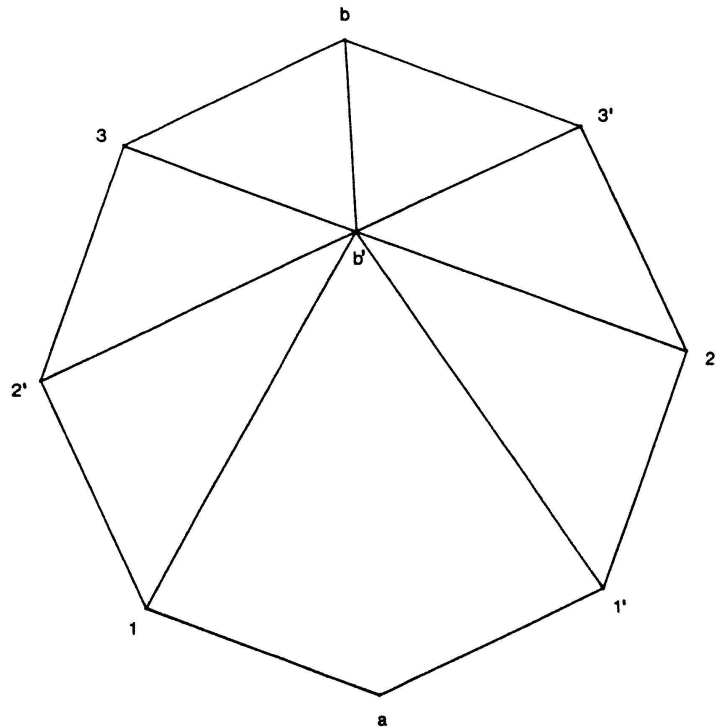
Die Rösselringe (a), ( $\bar{a}$ ) und (c), ( $\bar{c}$ ) können als Elemente einer Gruppe aufgefasst werden. Verknüpfung ist das in Fig. 9 angedeutete Umformungsverfahren. Wir haben etwa einen 36-teiligen Rösselring, dessen kennzeichnende Strecken (schwarz, punktiert bzw. stark gezeichnet) in der angedeuteten Weise mit Richtungspfeilen versehen wird. Ersetzen wir etwa die drei stark gezeichneten Pfeile durch die drei anderen, dann entsteht ein neuer 36-teiliger Rösselring. Dieses Verfahren lässt sich im Fall (a) und ( $\bar{a}$ ) an jeder Quadratseite durchführen, in den Fällen (b) und ( $\bar{b}$ ) bzw. (c) und ( $\bar{c}$ ) nur in Auswahl. Hierbei werden aus (a) und ( $\bar{a}$ ) die Ringe (c) und ( $\bar{c}$ ) erzeugt bzw. (a), ( $\bar{a}$ ) und (c) und ( $\bar{c}$ ) miteinander vertauscht; in den Fällen (b) und ( $\bar{b}$ ) erhalten wir nur wiederum (b) bzw. ( $\bar{b}$ ). Es gibt jedoch auch Fälle, bei denen aus dem 36-teiligen Rösselring eine Mehrheit von Teilringen wird, die mit zum System der Elemente gerechnet werden muss. Ohne auf die weiteren Einzelheiten näher einzugehen, fassen wir das Wesentliche zusammen: Die Doppelsprünge der Fig. 3 sind symmetrisch zu den beiden Mittelparallelen des Quadrats, zu dessen Diagonalen und zu dessen Mittelpunkt, ferner drehsymmetrisch bei Drehung um den Quadratmittelpunkt um Vielfache von  $90^\circ$ . Sie können durch einfache Einzelsprünge ergänzt werden zu 36-teiligen Rösselringen, nicht aber zu axialsymmetrischen oder diagonalsymmetrischen. Ergänzend sei erwähnt, dass die Endzifferverteilung der Fig. 5 auch für die Ringe ( $\bar{a}$ ), (c) und ( $\bar{c}$ ) gilt, ferner für eine weitere Anordnung (d) und ihr Spiegelbild ( $\bar{d}$ ) an der senkrechten Mittelparallelen des Quadrats. Diese Verteilungen (d) und ( $\bar{d}$ ) sind zu den beiden Quadratdiagonalen symmetrisch, folglich auch zentrisch symmetrisch. Sie bestehen jedoch nicht aus einem 36-teiligen Ring, vielmehr aus drei 12-teiligen.

Ich wende mich nunmehr zu den Betrachtungen Kowalewskis:

### 3. Drehsymmetrische Rösselringe

Figur 10 bezieht sich auf die nötige Vorüberlegung, nämlich auf die Bezeichnung gleichwertiger Felder des Bretts bei drehsymmetrischer Anordnung. Das zugehörige Netz (Fig. 11), das sich kaum von jenem Kowalewskis unterscheidet, dient zum Aufbau des 36-teiligen Rings aus vier aneinandergehängten 9-teiligen «Ketten», die in der

a	2'	3'	3	2	a
2	b	1'	1	b	2'
3	1	b'	b'	1'	3'
3'	1'	b'	b'	1	3
2'	b	1	1'	b	2
a	2	3	3'	2'	a



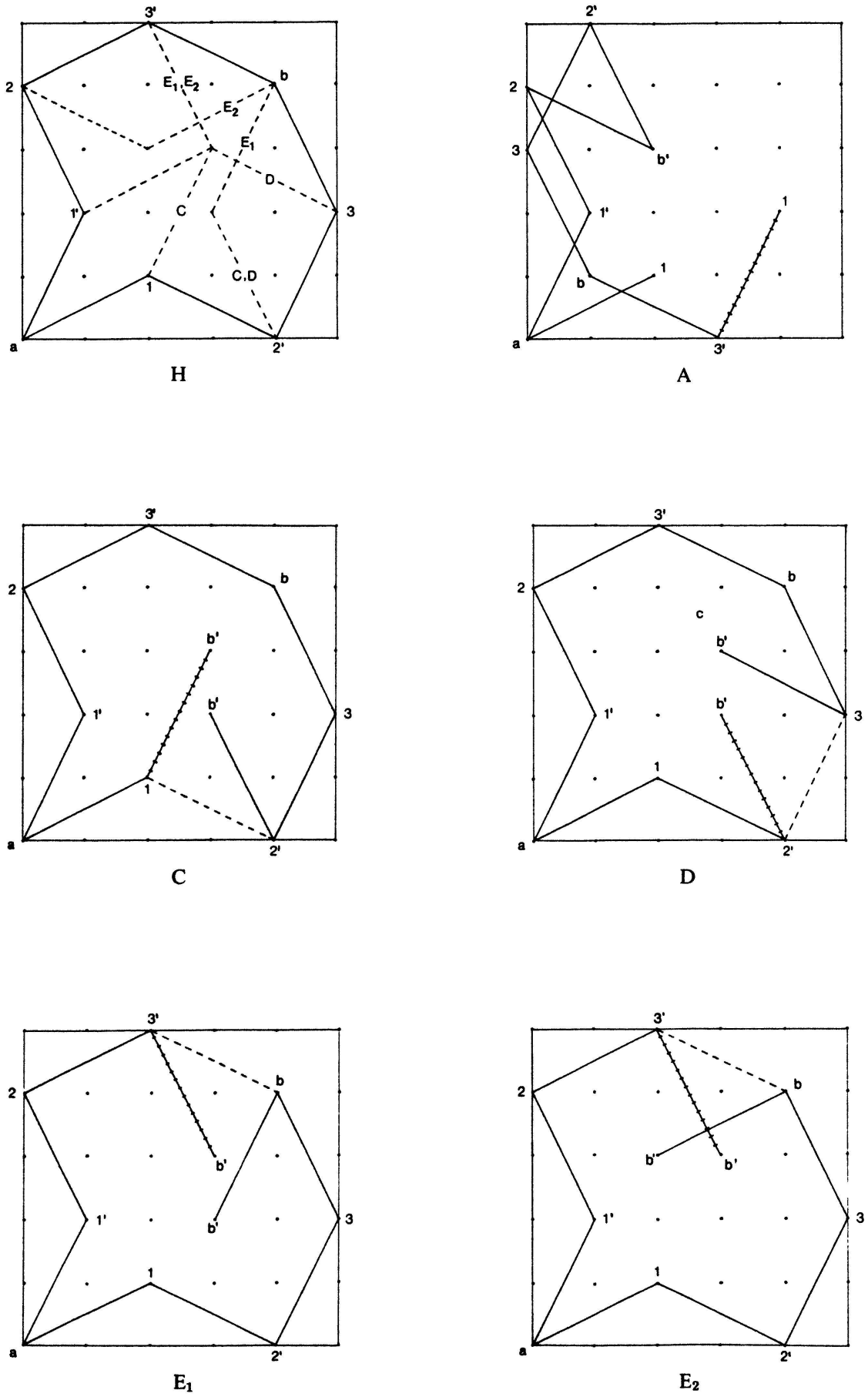
Figur 10. Grundfigur zur Herstellung dreh-symmetrischer Ringe.

Figur 11. Symbolfigur zur Herstellung der Ketten, aus denen der Ring aufgebaut werden kann.

Symbolfigur das Streckenpaar 1 a 1' im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen sollen. Es gibt  $10 = 2 \times 5$  derartige Ketten; je zwei davon schliessen sich zu einem Paar zusammen, das hinsichtlich der Quadratdiagonalen a b b' b' b a spiegelgleich liegt und deshalb durch eine einzige dieser Ketten repräsentiert werden kann. Wir können von einer dieser Ketten zur anderen übergehen, indem wir die ungestrichenen und die gestrichenen Ziffern miteinander vertauschen. Figur 12 zeigt die 5 von mir ausgewählten Ketten. Deren Aufzählung in Ziffern und Buchstaben folgt unten. Kowalewski, der die von Fitting elegant ausgewertete Arbeit von R. Moon [3\*] nicht kannte, hat nicht bemerkt, dass sich die vier letzten Ketten mit einer gemeinsamen Hilfsfigur in Verbindung bringen lassen, die von mir als Fig. H hinzugefügt ist. Werden die mit Querstrichen versehenen Strecken in den einzelnen Ketten so umgelegt, wie das durch die gestrichelten Strecken angedeutet ist, dann haben wir einen achteiligen Ring vor uns. Zunächst wird aus dem Ring ein von den festen Gliedern 1 a 1' verschiedenes Glied weggenommen. Dann ergänzen wir die von den freien Enden zu zwei benachbarten Punkten b' möglichen Glieder und haben die Ketten Kowalewskis vor uns. Hier die Ketten:

- 
- 1 a 1' 2 b' 2' 3 b 3' 1 ~ (1' 3 b 3' 2 b' 2' 1 a 1') → A
  - b' 1 a 1' 2 3' b 3 2' b' ~ (b' 2 3' b 3 2' 1 a 1' b') → C
  - b' 2' 1 a 1' 2 3' b 3 b' ~ (b' 3' b 3 2' 1 a 1' 2 b') → D
  - b' b 3' 2 1' a 1 2' 3 b' ~ (b' 3 2' 1 a 1' 2 3' b b') → E1, E2
- 

Tabelle 1: Kowalewskis Ketten in Ziffern.

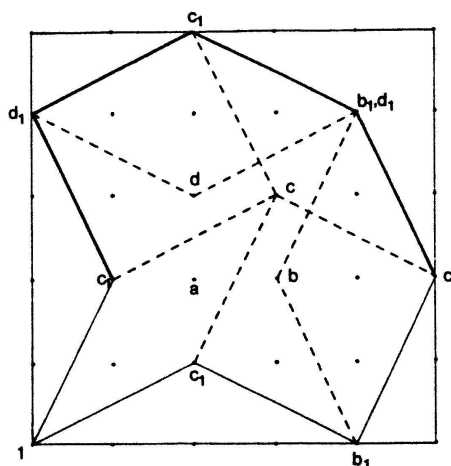


Figur 12. Kowalewskis Ketten; Beziehung zu denen Moons.

In der Hilfsfigur ist angedeutet, welche Strecken der Moonschen Ringe gestrichen werden müssen, um zu den ausgewählten Typen Kowalewskis zu gelangen. Die erste Kette A findet sich freilich nicht unter den Typen von Moon-Fitting vor, denen ich mich nunmehr zuwende.

#### 4. Das Verfahren von Moon-Fitting

In ausserordentlich eleganter Form hat Fitting das von Moon nur knapp angedeutete Vorgehen dargestellt. Der Gedanke ist der folgende: Der in Fig. 12, H gezeichnete achteilige Ring kann durch Drehen und Spiegeln zu einem Quadrupel ergänzt werden, das alle Felder des Quadrats bis auf die vier mittleren Punkte umfasst. Werden (Fig. 13) diese Punkte der Reihe nach mit a, b, c, d bezeichnet und dem verwendeten Ring die Eckenzahl 1 zugeordnet, dann lassen sich die Ecken des Rings, die durch einen Sprung mit den mittleren Punkten verbunden werden können, durch die nämlichen Buchstaben (mit dem zugesetzten Index 1) bezeichnen. Jetzt entstehen auf dem Ring vier Strecken mit den Endpunkten  $b_1 c_1$  und vier Strecken mit Endpunkten  $c_1 d_1$  (kräftig gezeichnet). Nehmen wir aus dem Ring eine dieser ausgezeichneten Strecken weg, dann können wir durch Hinzufügen passender Strecken aus den gestrichelten zu zwei benachbarten mittleren Punkten gelangen. Setzen wir dies sinngemäß fort, dann erhalten wir durch Weglassen passender vier Strecken aus den vier Moonschen Ringen und Hinzufügen von  $4 \times 2$  Strecken zu den mittleren Punkten hin einen geschlossenen Rösselring. Das gibt  $4^4 = 256$  derartige Rösselringe, jedoch sind viele davon hinsichtlich Spiegelung und Drehung gleichwertig, und einige weisen interessante Symmetriebeziehungen auf. In Fig. 14 sind die vier zentralsymmetrischen Fälle gekennzeichnet; um der besseren Übersichtlichkeit willen sind nicht die verbleibenden Teile der Moonschen Ringe wiedergegeben, sondern nur die (kräftig gezeichneten) entfernten Stücke samt den Verbindungsstrecken zu den mittleren Punkten hin (gestrichelt).



Figur 13. Vorbehandlung eines Moonschen Ringes.

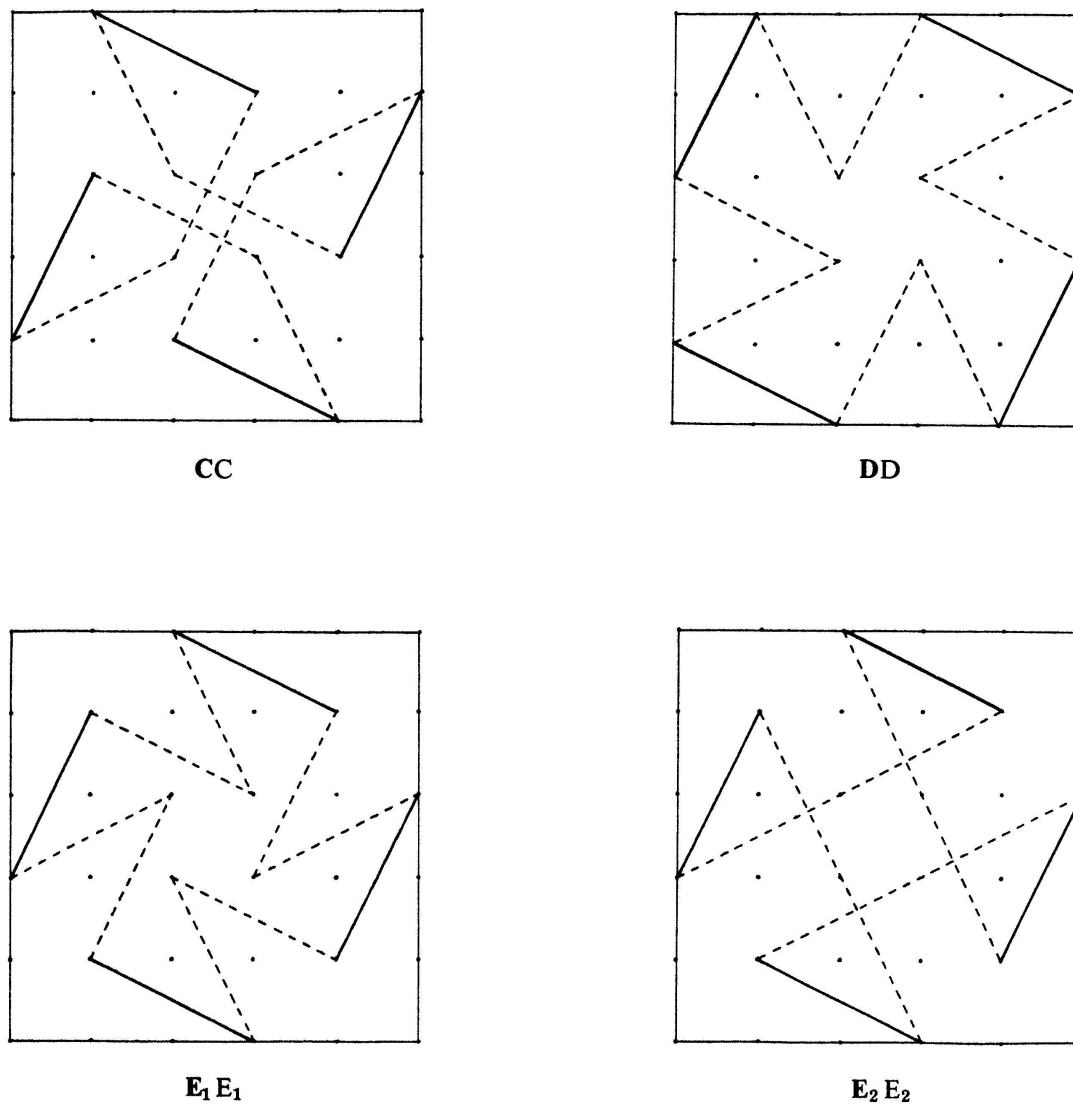


Fig. 14. Symbolische Darstellung der nach Moons Verfahren möglichen zentralsymmetrischen Fälle.

Figur 15 bezieht sich auf die Gesamtheit aller möglichen Änderungen: Im ersten achteiligen Ring gibt es vier Stücke der Form  $b_1 c_1$  (bezeichnet mit (I)), im zweiten vier Stücke der Form  $c_2 d_2$  (II), im dritten vier Stücke der Form  $d_3 a_3$  (III) und im vierten vier Stücke der Form  $a_4 b_4$  (IV). Die ebenfalls mögliche Zuordnung von  $c_1 d_1$  zu  $d_2 a_2$ ,  $a_3 b_3$  und  $b_4 c_4$  geht aus der vorigen durch Spiegeln an der senkrechten Mittelparallelen des Quadrats hervor, ist also nicht wesentlich von der ursprünglichen verschieden. Axialsymmetrische Beispiele (Fig. 16 zeigt einen derartigen Fall) enthalten stets zwei 18-teilige Ringe, und zwar deshalb, weil die Ringe mit I, IV bzw. II, III nur vierteilig sind; diagonalsymmetrische 36-teilige Rösselringe dieses Typs sind nicht vorhanden. Fitting hat auch für die nicht durch dieses Verfahren erfassbaren Fälle Konstruktionsmethoden angegeben, sie bleiben jedoch im Individuellen stecken. Deshalb soll hier ergänzend auf ein anderes Verfahren hingewiesen werden, das anscheinend bisher noch nicht verwendet worden ist. Ich beginne mit einem Spezialfall, nämlich mit der Behandlung der zentralsymmetrischen Fälle.

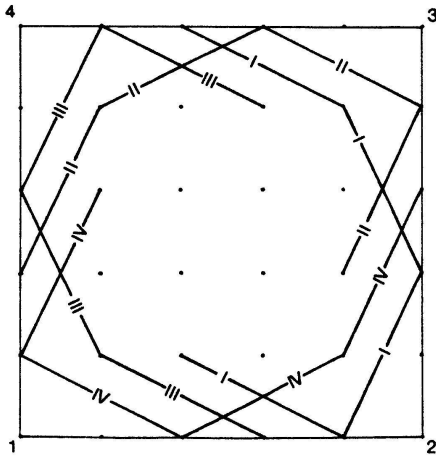
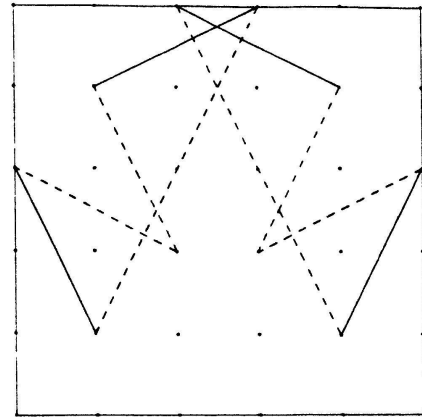


Fig. 15. Gesamtheit der Strecken, die in den Moonschen Ringen wegfallen.

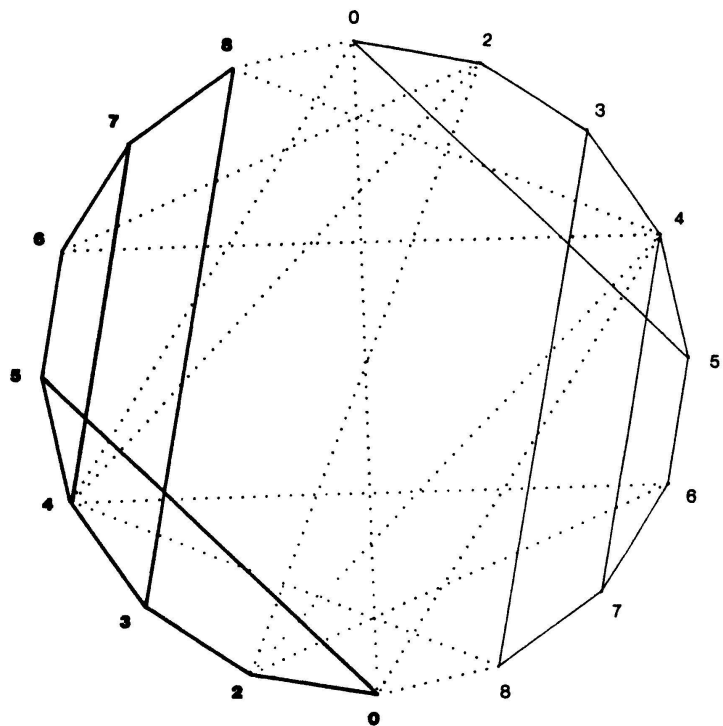


Figur 16. Ein axialsymmetrischer Fall.

### 5. Die zentralsymmetrischen 36-teiligen Rösselringe

Ausgangspunkt ist Fig. 17, die sich nur dadurch von Fig. 2 unterscheidet, dass nunmehr die Akzente entfallen. Im zugehörigen Netz (Fig. 18) finden wir zwei neungliedrige Punktgruppen vor, die gewöhnlich und die fett bezeichnet. Diese beiden Gruppen stehen einander symmetrisch gegenüber und können jede für sich behandelt werden. Zwischen den 9 beteiligten Punkten gibt es aufgrund der kräftig und der in gewöhnlicher Strichdicke gezeichneten Verbindungsstrecken  $2 \times 6$  Ketten in Ziffern,

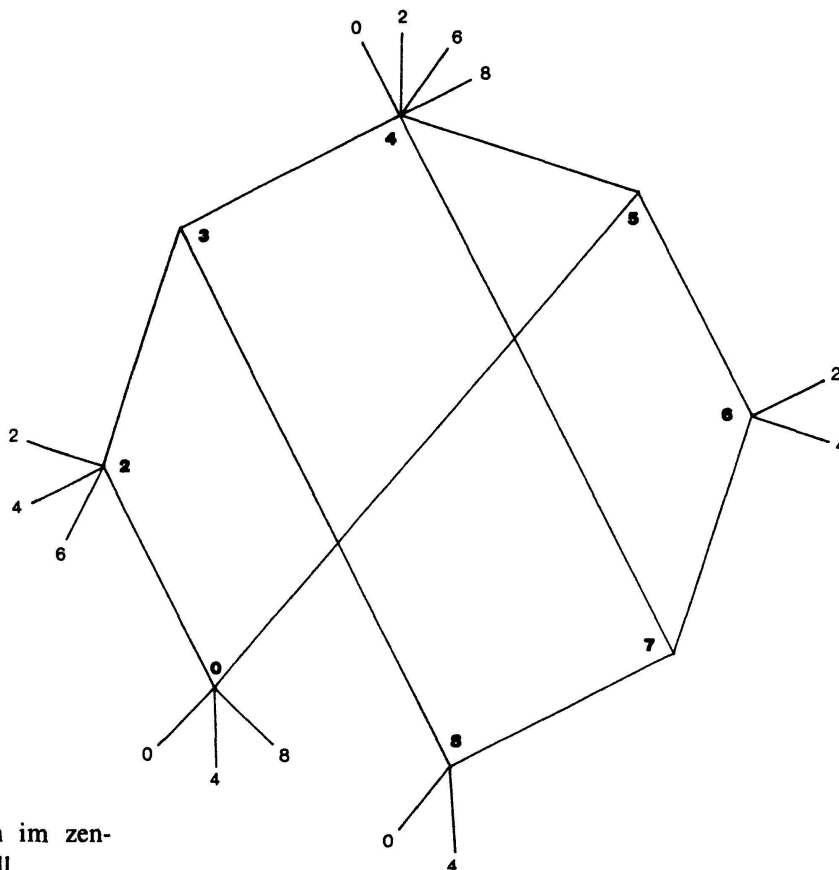
1	5	8	6	3	1
3	7	2	0	7	5
6	0	4	4	2	8
8	2	4	4	0	6
5	7	0	2	7	3
1	3	6	8	5	1



Figur 17. Unterlagen für den zentralsymmetrischen Fall.

Figur 18. Netz zum zentralsymmetrischen Fall.





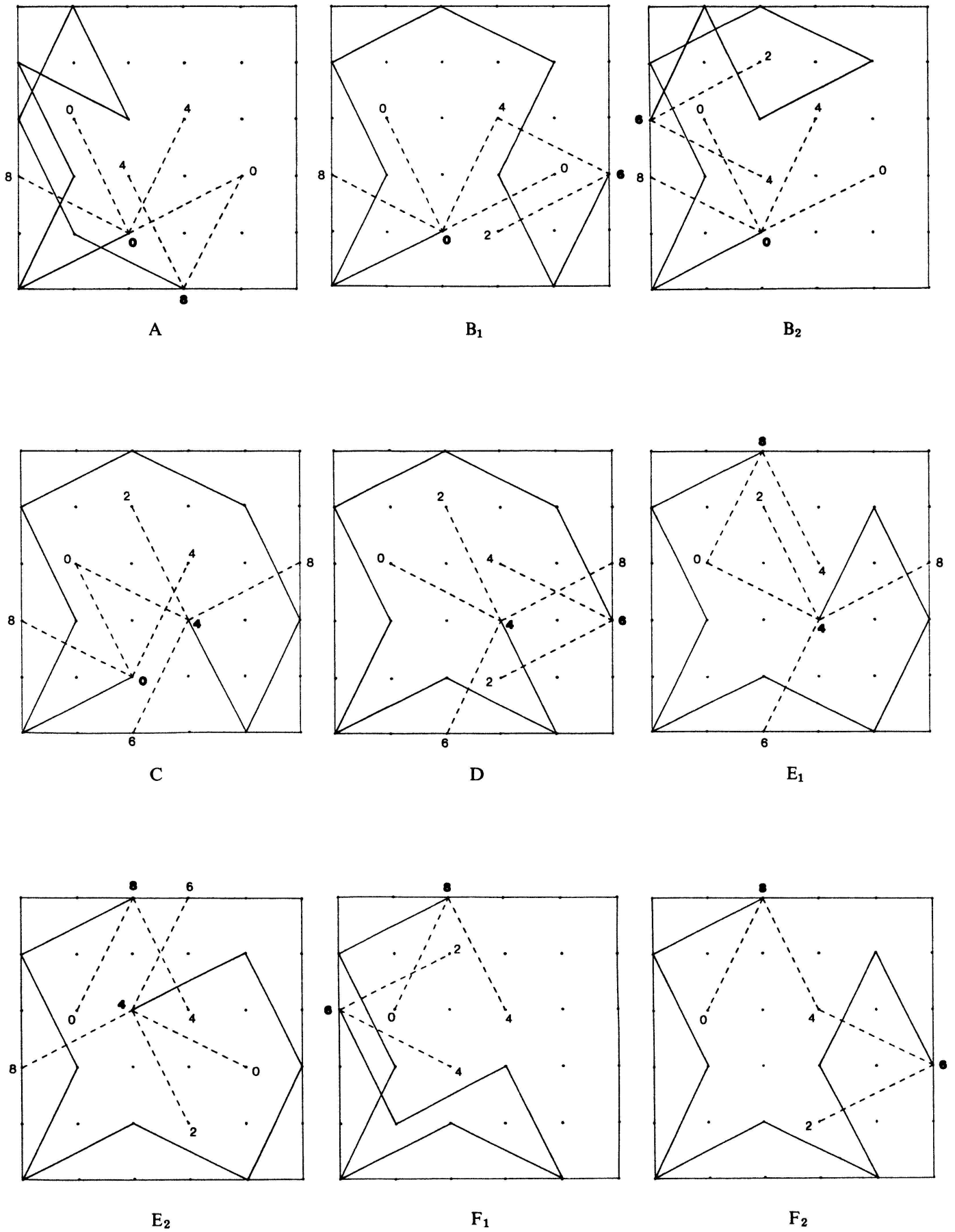
Figur 19. Die Ketten im zentralsymmetrischen Fall.

die sich aus Fig. 19 entnehmen lassen (die Ziffer 1 ist in den Figuren unterdrückt, weil sie nur mit den Ziffern 0 und 2 verbunden ist und mit keiner anderen):

A:	012 345 678	$\bar{A}$ :	210 543 876
B:	012 387 456	$\bar{B}$ :	210 567 438
C:	012 387 654	$\bar{C}$ :	210 567 834
D:	450 123 876	$\bar{D}$ :	432 105 678
E:	476 501 238	$\bar{E}$ :	478 321 056
F:	674 501 238	$\bar{F}$ :	876 321 056

Tabelle 2. Die 6 Ziffernfolgen zur Kennzeichnung der 9 Ketten zwischen den 9 Punkten der Gruppe.

Den Ziffernfolgen B, E und F entsprechen jeweils zwei Strichketten. Die Ketten  $\bar{X}$  sind die Bilder der Ketten X bei Spiegelung an der senkrechten Mittelparallelen des Quadrats, müssen also nicht eigens gezeichnet werden. Figur 20 zeigt die Bilder der 9 Ketten A, ..., F<sub>2</sub> im Ausgangsquadrat. Der Übergang von den Ketten zu den Ziffernfolgen ist also eindeutig, der von den Folgen zu den Ketten gelegentlich zweideutig.



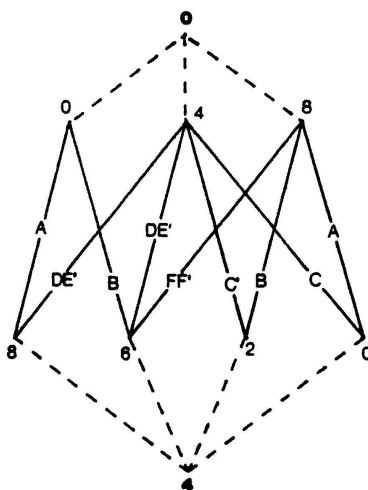
Figur 20. Die 9 Ketten, so normiert, dass 012 links unten steht.

Indem wir diese Ketten durch je einen Anschluss-Strich verbinden, erhalten wir entweder einen 18-teiligen Rösselring oder eine neue ungeschlossene 18-teilige Kette, die sich zusammen mit ihrer zentralsymmetrisch liegenden Gegenkette zu einem 36-teiligen Rösselring zusammensetzen lässt. Ich will nicht alle Einzelfälle dieser Paarungen vorführen, vielmehr das Verfahren am besonders eindrucksvollen Beispiel der Kette C: Sie beginnt mit **0** und endet mit **4**; aus **0** können wir nach **0**, **4** oder **8** gehen, aus **4** nach **0**, **2**, **6** oder **8**. Zwischen diese Punktepaare müssen nun die vorigen Ketten eingepasst werden, und zwar entweder im direkten Lauf der Teilfiguren **20** oder in deren Spiegelbild, und gegebenenfalls verdreht, ausserdem von vorne nach hinten oder umgekehrt durchlaufen. Wir entnehmen der Tabelle 2, welche Paarungen und welche einzuschaltende Ketten möglich sind. Die Zuordnung geht dann vorläufig aus Fig. 21 hervor.

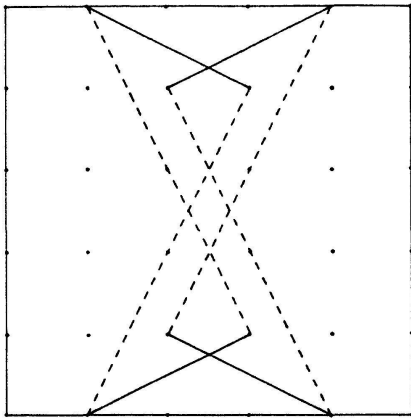
Die sehr reichhaltigen Kombinationsmöglichkeiten umfassen folgende 36-teilige Rösselringe: **CA**, **CB<sub>1</sub>**, **CB<sub>2</sub>**, **C $\bar{B}_1$** , **CC** (vgl. Fig. 14), **CD**, **CE<sub>1</sub>**, **CE<sub>2</sub>**. Dazu treten Paare 18-teiliger Rösselringe: **CA** (zwei Möglichkeiten), **CB<sub>1</sub>**, **CB<sub>2</sub>**, **C $\bar{B}_2$** , **CC**, **C $\bar{D}$** , **CE<sub>2</sub>**, **CF<sub>1</sub>**, **CF<sub>2</sub>**, **C $\bar{F}_1$**  und **C $\bar{F}_2$** . Jene Fälle, die sich so übersichtlich in der Symbolik der Fig. 14 wiedergeben lassen, sind in Fig. 22 gezeichnet. Insgesamt finden wir durch Kombinieren der sämtlichen neun Ketten **21** 36-teilige Rösselringe und **23** 18-teilige Ringpaare. Das Verfahren Fittings lässt mit einem Schlag erkennen, wann Zerfall eintritt und wann nicht. Bei den durch Fittings Verfahren nicht erfassten Fällen müssen zuerst zwei aufeinanderfolgende Ketten wirklich gezeichnet werden, um den Entscheid zu fällen. Als Beispiel sei in Fig. 23 der nicht zu Fittings Typen gehörende Fall **AC** betrachtet, der auf zwei 18-teilige Ringe führt.

### 6. Kennziffern zentralsymmetrischer Rösselringe, Erweiterung

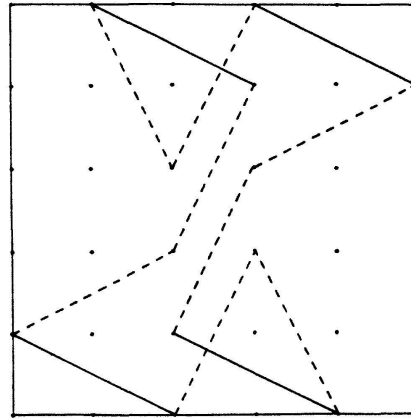
Das Bisherige erweckt den Anschein, es sei vermittels des eingeschlagenen Verfahrens nur jene Familie zentralsymmetrischer Rösselsprünge erfasst, deren erzeugende Ketten auf die beiden Neunpunktesysteme **0, ..., 8** und **0, ... 8** gestützt sind. Dem ist jedoch nicht so. Wir können nämlich ergänzend jene  $2 \times 4$  Rösselsprünge heranziehen,



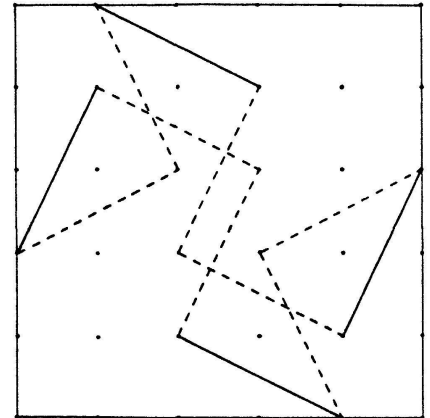
Figur 21. Zum Einschalten.



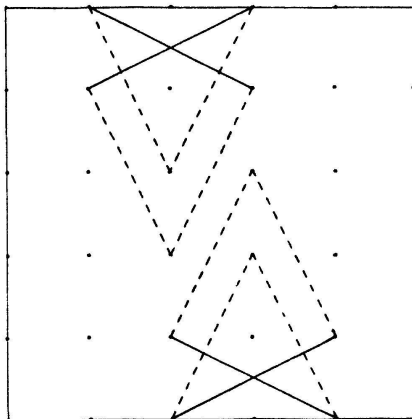
$C\bar{C}$



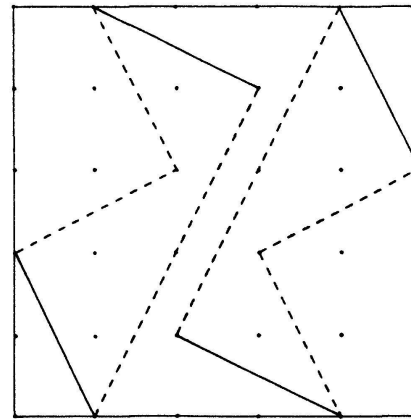
$CD$



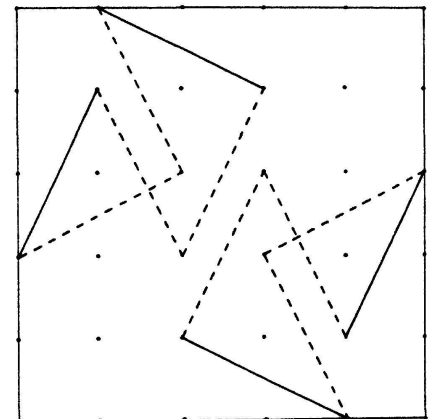
$CE_1$



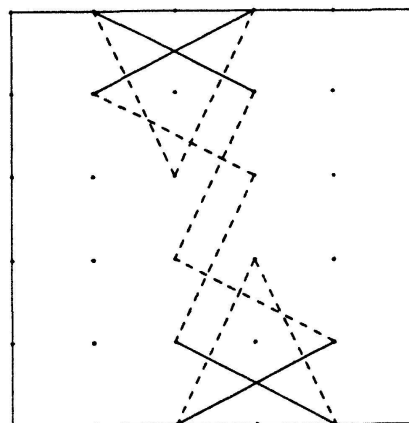
$C\bar{E}_1$



$C\bar{D}$

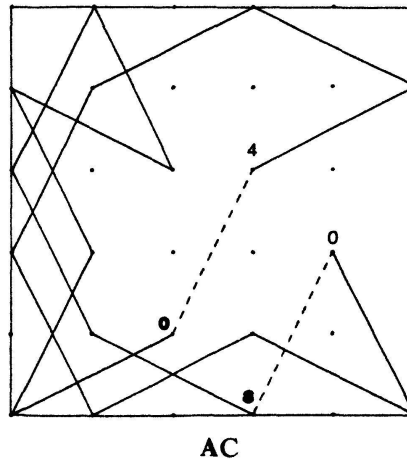


$CE_2$



$C\bar{E}_2$

Figur 22. Die in Fittings Verfahren enthaltenen Rösselringe, die aus der gegebenen Kette C entstehen.



Figur 23. Beispiel für den Entscheid über den Zerfall.

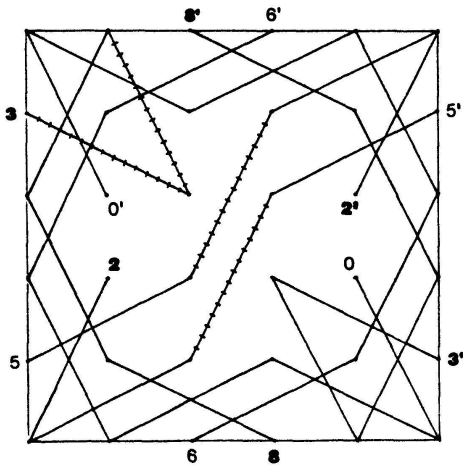
die innerhalb eines Rösselrings von den mittleren Punkten  $4, 4', 4, 4'$  ausgehen. Haben wir deren Lage gewählt, dann sind noch weitere Rösselsprünge auf dem Brett fixiert, was die nun folgende Auszählung auf dem zugehörigen Netz wesentlich erleichtert. Dabei zeigt sich nun überraschenderweise, dass durch die in Abschnitt 5 wiedergegebenen Paarungen nicht etwa eine Auswahl, vielmehr alle überhaupt möglichen zentralsymmetrischen Rösselringe erfasst werden. Sie sind durch zwei Elemente charakterisiert, einerseits nämlich durch die Lage der aus den mittleren Punkten kommenden Sprünge (die natürlich auch in Ziffern ausgesprochen werden könnte), andererseits durch das Einpassungsverfahren, das durch die Paarung der Endpunktfelder der Ketten mit den möglichen Ketten gekennzeichnet ist:

04: C	24: $\bar{C}$	46: D, $\bar{E}$
06: B	26: $\bar{A}$	48: $\bar{D}$ , E
08: A	28: $\bar{B}$	68: F, $\bar{F}$

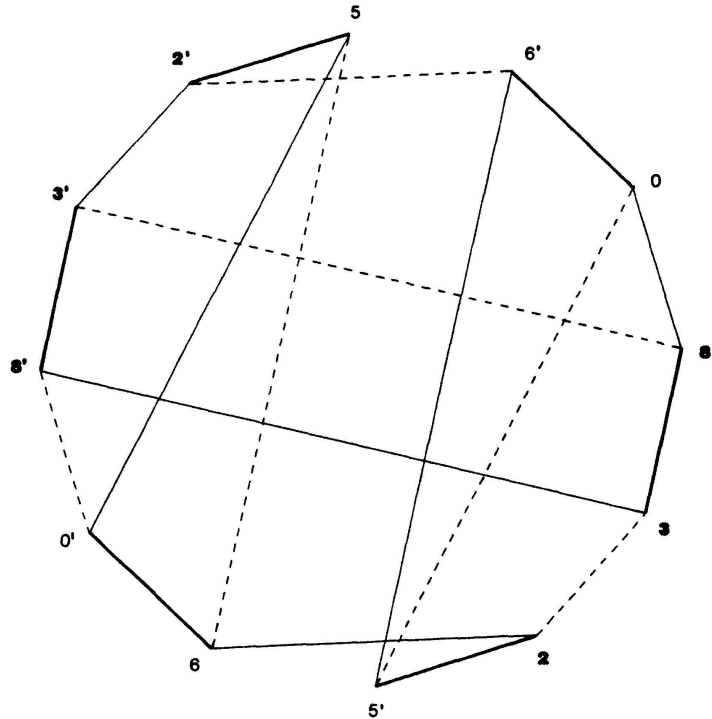
Tabelle 3. Zum Anschließen von Ketten an eine gegebene.

Geben wir nunmehr das Anpassungsverfahren preis, dann lassen sich beim Übergang zum Netz alle weiteren Rösselringe mit den nämlichen «mittleren Sprüngen» auffinden, je nach Art 36-teilige oder 18-teilige Paare. Wie das zu machen ist, wurde bereits in Abschnitt 2 angedeutet. Betrachten wir etwa den bereits in Fig. 23 vorgeführten zerfallenden Rösselring AC. Wir erhalten (Fig. 24) 6 feste Ketten mit den freien Endpunkten  $2, 2', 3, 3', 8, 8'; 0, 0', 5, 5', 6, 6'$ .

Gehen wir nun zum Netz über (Fig. 25), das sich auf ein regelmässiges Zwölfeck stützt, dann erhalten wir zwei neue unsymmetrische Rösselsprünge, und zwar 36-teilige, je nachdem wir den durch kräftige Striche angedeuteten festen Ketten entweder die in gewöhnlicher Strichdicke wiedergegebenen oder die gestrichelt ausgeführten Strecken hinzufügen. Diese eingeschalteten Linien schliessen sich ihrerseits zu einem 12-teiligen Ring zusammen. Wir haben also eine Erweiterung des in Fig. 9 verwendeten Umbildungsverfahrens vor uns. Lässt sich an Kette X die Kette X anschliessen,



Figur 24. Die im Fall AC nach Wahl der mittleren Sprünge mitbestimmten Sprünge.



Figur 25. Konstruktion der hinzutretenden unsymmetrischen Rösselringe.

dann haben wir einen drehsymmetrischen Fall vor uns. Das sind die bereits gezeichneten Fälle  $AA = (a)$  (Fig. 7),  $CC$ ,  $DD$ ,  $E_1E_1$ ,  $E_2E_2$  (Fig. 14) Kowalewskis. Lässt sich an Kette  $X$  die Kette  $\bar{X}$  anschliessen, dann haben wir einen axialsymmetrischen Fall vor uns, und zwar liegt Axialsymmetrie zu beiden Mittelparallelen des Quadrats vor, weil wir einen zentrisch symmetrischen Fall vor uns haben. Von dieser Art sind die Fälle  $B_1\bar{B}_1$ ,  $B_2\bar{B}_2$ ,  $C\bar{C}$ ,  $D\bar{D}$ ,  $E_1\bar{E}_1$  (Fig. 17) und  $E_2\bar{E}_2$ . Es gibt jedoch weitere axial-symmetrische Fälle, die nicht gleichzeitig zentrisch symmetrisch sind; im günstigsten Fall enthalten sie zwei 18-teilige Ringe. Schliesslich gibt es auch Fälle mit Symmetrie zu einer Quadratdiagonalen. Sie zerfallen in drei Ringe, und im günstigsten Fall in drei 12-teilige.

Über das Skizzenhafte meiner Ausführungen bin ich mir völlig klar. Ich wollte jedoch bei dem verhältnismässig einfachen Gegenstand nur Andeutungen geben, weil die volle Ausführung zu ungebührlicher Weitschweifigkeit führen würde.

J. E. Hofmann †

ANMERKUNGEN

- [1\*] Vgl. etwa J. Naas/H. L. Schmid: Mathematisches Wörterbuch II, Berlin/Stuttgart 1961 u.ö., Artikel Lateinisches Quadrat.
- [2\*] Man sehe etwa G. Kowalewski: Alte und neue mathematische Spiele, Leipzig/Berlin 1930, 115/22, ferner H. Schubert: Mathematische Mussestunden, 10. von F. Fitting neu bearbeitete und erweiterte Auflage, Berlin 1943, 240/49.
- [3\*] R. Moon: On the knight's move at chess, in: Cambridge math. Journal 3, 233–236 (1843).