Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 42 (1987)
Heft: 2

Rubrik: Aufgaben

ϱ	a	b	c	ϱ_a	ϱ_b	ϱ_c	A
3	13	40	51	4	13	156	156
	16	25	39	5	8	120	120
	8	26	30	4	16	48	96
	7	24	25	4	21	28	84
	8	15	17	5	12	20	60
	10	10	12	8	8	12	48
4	21	85	104	5	21	420	420
	12	50	58	5	24	120	240
	18	20	34	8	9	72	144
	15	15	24	9	9	36	108
	9	40	41	5	36	45	180
5	31	156	185	6	31	930	930
	36	91	125	7	18	630	630
	17	87	100	6	34	255	510
	13	68	75	6	39	130	390
	11	60	61	6	55	66	330
	12	35	37	7	30	42	210

J. Binz, Universität Bern und Städt. Gymnasium Bern-Kirchenfeld

 0013-6018/87/020035-08$1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 938. Die folgenden Summen:

$$S_0(m,n) := \sum_{s=0}^{n} \binom{2n+1}{2s}\binom{2n+m-s}{2n}$$

$$S_1(m,n) \;= \sum_{s=0}^{n} \binom{2n+2}{2s+1}\binom{2n+1+m-s}{2n+1}, \qquad m,n \in \mathbf{N}$$

sind geschlossen auszuwerten.

J. Binz, Bolligen

Lösung

1. $\binom{2n+1}{2s}$ ist der Koeffizient von x^{2s} in $(1+x)^{2n+1}$, $\binom{2n+m-s}{2n}$ ist der Koeffizient von $x^{2(m-s)}$ in $\dfrac{1}{(1-x^2)^{2n+1}}$.
Also ist $S_0(m,n)$ der Koeffizient von x^{2m} in

$$((1+x)/(1-x^2))^{2n+1} = (1-x)^{-(2n+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+2n}{2n} x^j.$$

Man erhält somit ($j=2m$):

$$S_0(m,n)=\binom{2m+2n}{2n}.$$

2. In analoger Weise ergibt sich:

$S_1(m,n)$ ist der Koeffizient von x^{2m+1} in

$$((1+x)/(1-x^2))^{2n+2}=(1-x)^{-(2n+2)}=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{j+2n+1}{2n+1}x^j.$$

Man erhält somit ($j=2m+1$):

$$S_1(m,n)=\binom{2n+2m+2}{2n+1}.$$

M. Vowe, Therwil

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), K. Dilcher (Halifax, CD), F. Götze (Jena, DDR), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kamaras (Pécs, Ungarn), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), P. Müller (Nürnberg, BRD), I. Paasche (Stockdorf, BRD), P. Paule (Bayreuth, BRD), W. Raffke und K. Warneke (Vechta, BRD), H. M. Srivastava (Victoria, CD).

Aufgabe 939. Man bestimme den geometrischen Ort der Lotfusspunkte aus einem Pol O auf den Verbindungsgeraden der Schnittpunkte, welche die Schenkel eines variablen Winkels mit Scheitel O von fester Grösse mit zwei gegebenen nicht durch O verlaufenden Geraden besitzen.

G. Unger, Dornach

Lösung

Es seien p, q die Schenkel des der Grösse nach festen Winkels α, g, h mit $g\cap h=Q$ die beiden gegebenen, nicht durch O verlaufenden Geraden. Bei der Drehung von α um O durchlaufen $A:=q\cap g$ bzw. $C:=p\cap h$ projektive Punktreihen auf g bzw. h. Die Einhüllende der Geraden AC ist somit ein Kegelschnitt K_1. Wenn p mit einer der isotropen Geraden durch O zusammenfällt, ist q, und daher auch AC, mit p inzident, denn der Winkel einer isotropen Geraden mit sich selbst ist unbestimmt. K_1 berührt daher die beiden isotropen Geraden durch O und hat also O als einen seiner Brennpunkte. Der geometrische Ort des Lotfusspunktes P_1 von O auf AC ist folglich ein Kreis Γ_1, der Hauptkreis von K_1. In genau derselben Weise findet man für den geometrischen Ort des Lotfusspunktes P_2 von O auf BD den Hauptkreis Γ_2 des von den Geraden BD eingehüllten Kegelschnittes K_2. Die Kreise Γ_1 und Γ_2 können zerfallen. Das tritt ein je nachdem Γ_1 oder Γ_2 ein Parabel ist, d.h. wenn A und C bzw. B und D gleichzeitig Fernpunkte sein können, wenn also $\alpha+\beta\equiv 0 \pmod{\pi}$ bzw. $\alpha\equiv\beta \pmod{\pi}$. Es zerfällt dann, vorausgesetzt, dass $\alpha\neq\beta$, entweder Γ_1 oder Γ_2. Im Ausnahmefall $\alpha=\beta$ zerfallen Γ_1 und Γ_2 beide, und zwar in dieselben Bestandteile: die Ferngerade und eine im Endlichen liegende Gerade. Die Kreise Γ_1 und Γ_2 sind leicht zu konstruieren.

Wenn p mit OQ zusammenfällt, ist AC mit g inzident. Der Lotfusspunkt G von O auf g gehört somit zu Γ_1. Dasselbe gilt für den Lotfusspunkt H von O auf h (man lasse q mit OQ zusammenfallen!). Zur Konstruktion von Γ_1 genügt nun der Lotfusspunkt P_1 für eine willkürliche Stellung vom AC. Ähnliches gilt für den jedenfalls durch G und H gehenden Kreis Γ_2.

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL; 2 weitere Lösungen), W. Raffke (Vechta, BRD), K. Warneke (Vechta, BRD).

Aufgabe 940. Bezogen auf ein kartesisches Koordinatensystem seien $A=(a,0)$, $B=(0,b)$, $C=(c,0)$, $D=(0,d)$ mit $a\neq c$, $b\neq d$ und $abcd>0$ die Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels, und es bezeichne k das Achsenverhältnis einer beliebigen Ellipse des Büschels, $k\geq 1$. Man ermittle das Minimum von k.

C. Bindschedler, Küsnacht
H. Kappus, Rodersdorf

Lösung

Die Gleichung einer Ellipse des Büschels kann auf die Form

$$bdx^2+2Bxy+acy^2-bd(a+c)x-ac(b+d)y+abcd=0$$

gebracht werden. Sind λ_1, λ_2 die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} bd & B \\ B & ac \end{pmatrix},$$

dann ist

$$k^2=\operatorname{Max}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2},\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right).$$

Für beliebige $s,t>0$ gilt die Äquivalenz

$$\operatorname{Max}\left(s,\frac{1}{s}\right)\leq\operatorname{Max}\left(t,\frac{1}{t}\right)\quad\Leftrightarrow\quad s+\frac{1}{s}\leq t+\frac{1}{t}.$$

$k^2=\operatorname{Max}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2},\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)$ ist also genau dann minimal, wenn $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ minimal ist. Nun ist

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{\lambda_1\lambda_2}-2=\frac{(bd+ac)^2}{abcd-B^2}-2.$$

k^2 ist somit minimal, wenn $B=0$ ist. Dann sind bd und ac die Eigenwerte, und es ist:

$$k_{\min}=\operatorname{Max}\left(\sqrt{\frac{bd}{ac}},\sqrt{\frac{ac}{bd}}\right).$$

P. Streckeisen, Zürich

Weitere Lösungen sandten F. Götze (Jena, DDR), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), P. Müller (Nürnberg, BRD), R. Wyss (Flumenthal).

Nachtrag zu Aufgabe 929: Eine weitere Lösung sandte Hj. Stocker (Wädenswil).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Oktober 1987* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 957. Man beweise die Ungleichung

$$\sin(x/2) + \cos x < (\pi - x)/2\,; \qquad 0 < x < \pi\,.$$

P. Ivady, Budapest, Ungarn

Aufgabe 958. Es seien

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \binom{n}{k} \quad \text{und} \quad y_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

Man berechne: $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n + \log y_n)$.

H. Alzer, Waldbröl, BRD

Aufgabe 959. Es seien $p, q_1, \dots, q_n$ paarweise verschiedene ungerade Primzahlen mit $p < q_i$ $(i = 1, \dots, n)$ und mit der Eigenschaft, dass $-q_i$ quadratischer Rest mod p ist $(i = 1, \dots, n)$. Man beweise oder widerlege: Jede natürliche Zahl n der Art

$$n = q_1^{v_1} q_2^{v_2} \dots q_n^{v_n}; \qquad v_i \in \mathbf{N}_0 \ (i = 1, \dots, n)$$

lässt sich in der Form

$$n = x^2 + p y^2\,; \qquad x, y \in \mathbf{Z}$$

darstellen.

A. Bege, Cluj, Rumänien

Aufgabe 960. Man bestimme den Ort des Punktes, in welchem sich zwei Kreise, die der Parabel $y^2 = 2p\,x$ einbeschrieben sind, unter rechten Winkeln schneiden.

C. Bindschedler, Küsnacht