

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 42 (1987)  
**Heft:** 2  
  
**Rubrik:** Aufgaben

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$\varrho$	$a$	$b$	$c$	$\varrho a$	$\varrho b$	$\varrho c$	$A$
3	13	40	51	4	13	156	156
	16	25	39	5	8	120	120
	8	26	30	4	16	48	96
	7	24	25	4	21	28	84
	8	15	17	5	12	20	60
	10	10	12	8	8	12	48
4	21	85	104	5	21	420	420
	12	50	58	5	24	120	240
	18	20	34	8	9	72	144
	15	15	24	9	9	36	108
	9	40	41	5	36	45	180
5	31	156	185	6	31	930	930
	36	91	125	7	18	630	630
	17	87	100	6	34	255	510
	13	68	75	6	39	130	390
	11	60	61	6	55	66	330
	12	35	37	7	30	42	210

J. Binz, Universität Bern und Städt. Gymnasium Bern-Kirchenfeld

© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/87/020035-08\$1.50+0.20/0

## Aufgaben

**Aufgabe 938.** Die folgenden Summen:

$$S_0(m, n) := \sum_{s=0}^n \binom{2n+1}{2s} \binom{2n+m-s}{2n}$$

$$S_1(m, n) = \sum_{s=0}^n \binom{2n+2}{2s+1} \binom{2n+1+m-s}{2n+1}, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

sind geschlossen auszuwerten.

J. Binz, Bolligen

### Lösung

1.  $\binom{2n+1}{2s}$  ist der Koeffizient von  $x^{2s}$  in  $(1+x)^{2n+1}$ ,  $\binom{2n+m-s}{2n}$  ist der Koeffizient von  $x^{2(m-s)}$  in  $\frac{1}{(1-x^2)^{2n+1}}$ .

Also ist  $S_0(m, n)$  der Koeffizient von  $x^{2m}$  in

$$((1+x)/(1-x^2))^{2n+1} = (1-x)^{-(2n+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+2n}{2n} x^j.$$

Man erhält somit ( $j = 2m$ ):

$$S_0(m, n) = \binom{2m+2n}{2n}.$$

2. In analoger Weise ergibt sich:

$S_1(m, n)$  ist der Koeffizient von  $x^{2m+1}$  in

$$((1+x)/(1-x^2))^{2n+2} = (1-x)^{-(2n+2)} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+2n+1}{2n+1} x^j.$$

Man erhält somit ( $j = 2m+1$ ):

$$S_1(m, n) = \binom{2n+2m+2}{2n+1}.$$

M. Vowe, Therwil

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), K. Dilcher (Halifax, CD), F. Götze (Jena, DDR), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kamaras (Pécs, Ungarn), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), P. Müller (Nürnberg, BRD), I. Paasche (Stockdorf, BRD), P. Paule (Bayreuth, BRD), W. Raffke und K. Warneke (Vechta, BRD), H. M. Srivastava (Victoria, CD).

**Aufgabe 939.** Man bestimme den geometrischen Ort der Lotfusspunkte aus einem Pol  $O$  auf den Verbindungsgeraden der Schnittpunkte, welche die Schenkel eines variablen Winkels mit Scheitel  $O$  von fester Grösse mit zwei gegebenen nicht durch  $O$  verlaufenden Geraden besitzen.

G. Unger, Dornach

### Lösung

Es seien  $p, q$  die Schenkel des der Grösse nach festen Winkels  $\alpha$ ,  $g, h$  mit  $g \cap h = Q$  die beiden gegebenen, nicht durch  $O$  verlaufenden Geraden. Bei der Drehung von  $\alpha$  um  $O$  durchlaufen  $A := q \cap g$  bzw.  $C := p \cap h$  projektive Punktreihen auf  $g$  bzw.  $h$ . Die Einhüllende der Geraden  $AC$  ist somit ein Kegelschnitt  $K_1$ . Wenn  $p$  mit einer der isotropen Geraden durch  $O$  zusammenfällt, ist  $q$ , und daher auch  $AC$ , mit  $p$  inzident, denn der Winkel einer isotropen Geraden mit sich selbst ist unbestimmt.  $K_1$  berührt daher die beiden isotropen Geraden durch  $O$  und hat also  $O$  als einen seiner Brennpunkte. Der geometrische Ort des Lotfusspunktes  $P_1$  von  $O$  auf  $AC$  ist folglich ein Kreis  $\Gamma_1$ , der Hauptkreis von  $K_1$ . In genau derselben Weise findet man für den geometrischen Ort des Lotfusspunktes  $P_2$  von  $O$  auf  $BD$  den Hauptkreis  $\Gamma_2$  des von den Geraden  $BD$  eingehüllten Kegelschnittes  $K_2$ . Die Kreise  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  können zerfallen. Das tritt ein je nachdem  $\Gamma_1$  oder  $\Gamma_2$  ein Parabel ist, d.h. wenn  $A$  und  $C$  bzw.  $B$  und  $D$  gleichzeitig Fernpunkte sein können, wenn also  $\alpha + \beta \equiv 0 \pmod{\pi}$  bzw.  $\alpha \equiv \beta \pmod{\pi}$ . Es zerfällt dann, vorausgesetzt, dass  $\alpha \neq \beta$ , entweder  $\Gamma_1$  oder  $\Gamma_2$ . Im Ausnahmefall  $\alpha = \beta$  zerfallen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  beide, und zwar in dieselben Bestandteile: die Ferngerade und eine im Endlichen liegende Gerade. Die Kreise  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  sind leicht zu konstruieren.

Wenn  $p$  mit  $OQ$  zusammenfällt, ist  $AC$  mit  $g$  inzident. Der Lotfusspunkt  $G$  von  $O$  auf  $g$  gehört somit zu  $\Gamma_1$ . Dasselbe gilt für den Lotfusspunkt  $H$  von  $O$  auf  $h$  (man lasse  $q$  mit  $OQ$  zusammenfallen!). Zur Konstruktion von  $\Gamma_1$  genügt nun der Lotfusspunkt  $P_1$  für eine willkürliche Stellung vom  $AC$ . Ähnliches gilt für den jedenfalls durch  $G$  und  $H$  gehenden Kreis  $\Gamma_2$ .

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL; 2 weitere Lösungen), W. Raffke (Vechta, BRD), K. Warneke (Vechta, BRD).

**Aufgabe 940.** Bezogen auf ein kartesisches Koordinatensystem seien  $A = (a, 0)$ ,  $B = (0, b)$ ,  $C = (c, 0)$ ,  $D = (0, d)$  mit  $a \neq c$ ,  $b \neq d$  und  $abcd > 0$  die Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels, und es bezeichne  $k$  das Achsenverhältnis einer beliebigen Ellipse des Büschels,  $k \geq 1$ . Man ermittle das Minimum von  $k$ .

C. Bindschedler, Küsnacht  
H. Kappus, Rodersdorf

### Lösung

Die Gleichung einer Ellipse des Büschels kann auf die Form

$$b d x^2 + 2 B x y + a c y^2 - b d (a + c) x - a c (b + d) y + a b c d = 0$$

gebracht werden. Sind  $\lambda_1, \lambda_2$  die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} b d & B \\ B & a c \end{pmatrix},$$

dann ist

$$k^2 = \text{Max} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right).$$

Für beliebige  $s, t > 0$  gilt die Äquivalenz

$$\text{Max} \left( s, \frac{1}{s} \right) \leq \text{Max} \left( t, \frac{1}{t} \right) \Leftrightarrow s + \frac{1}{s} \leq t + \frac{1}{t}.$$

$k^2 = \text{Max} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)$  ist also genau dann minimal, wenn  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  minimal ist. Nun ist

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{\lambda_1 \lambda_2} - 2 = \frac{(b d + a c)^2}{a b c d - B^2} - 2.$$

$k^2$  ist somit minimal, wenn  $B = 0$  ist. Dann sind  $b d$  und  $a c$  die Eigenwerte, und es ist:

$$k_{\min} = \text{Max} \left( \sqrt{\frac{b d}{a c}}, \sqrt{\frac{a c}{b d}} \right).$$

P. Streckeisen, Zürich

Weitere Lösungen sandten F. Götze (Jena, DDR), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), P. Müller (Nürnberg, BRD), R. Wyss (Flumenthal).

Nachtrag zu Aufgabe 929: Eine weitere Lösung sandte Hj. Stocker (Wädenswil).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Oktober 1987* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68).

**Aufgabe 957.** Man beweise die Ungleichung

$$\sin(x/2) + \cos x < (\pi - x)/2; \quad 0 < x < \pi.$$

P. Ivady, Budapest, Ungarn

**Aufgabe 958.** Es seien

$$x_n := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \binom{n}{k} \quad \text{und} \quad y_n := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

Man berechne:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \log y_n)$ .

H. Alzer, Waldbröl, BRD

**Aufgabe 959.** Es seien  $p, q_1, \dots, q_n$  paarweise verschiedene ungerade Primzahlen mit  $p < q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) und mit der Eigenschaft, dass  $-q_i$  quadratischer Rest mod  $p$  ist ( $i = 1, \dots, n$ ). Man beweise oder widerlege: Jede natürliche Zahl  $n$  der Art

$$n = q_1^{v_1} q_2^{v_2} \dots q_n^{v_n}; \quad v_i \in \mathbf{N}_0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

lässt sich in der Form

$$n = x^2 + p y^2; \quad x, y \in \mathbf{Z}$$

darstellen.

A. Bege, Cluj, Rumänien

**Aufgabe 960.** Man bestimme den Ort des Punktes, in welchem sich zwei Kreise, die der Parabel  $y^2 = 2p x$  einbeschrieben sind, unter rechten Winkeln schneiden.

C. Bindschedler, Küsnacht