

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 42 (1987)  
**Heft:** 6

**Artikel:** Kombinatorik mit dem Computer: Partitionen und Frankaturen  
**Autor:** Jeger, M.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-40045>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**Proof.** Any  $s$  of the  $w_i$ 's add to at least  $\binom{s}{2}$   
 $\Leftrightarrow$  any  $n-s$  of the  $w_i$ 's add to at most  $\binom{n}{2} - \binom{s}{2}$   
 $\Leftrightarrow$  any  $r$  of the  $w_i$ 's add to at most  $\binom{n}{2} - \binom{n-r}{2}$   
 $= [1 + 2 + \dots + (n-1)] - [1 + 2 + \dots + (n-r-1)]$   
 $= (n-1) + (n-2) + \dots + (n-r).$

V. W. Bryant, Department of Pure Mathematics,  
 Sheffield University

## REFERENCES

- 1 V. W. Bryant and H. Perfect: Independence Theory in Combinatorics. Chapman and Hall, 1980.
- 2 D. R. Fulkerson: Upsets in Round Robin Tournaments, Can. J. Math. 17 (1965) 957–969.
- 3 L. Mirsky: Transversal Theory. Academic Press, 1971.

© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/87/060000-00\$1.50+0.20/0

# Didaktik und Elementarmathematik

## Kombinatorik mit dem Computer: Partitionen und Frankaturen

### 1. Einleitung

In den verschiedensten Gebieten der Mathematik sieht man sich vor Probleme gestellt, die auf die Abzählung oder die Auflistung bestimmter Partitionen hinauslaufen. Als Partitionen bezeichnet man in der Kombinatorik additive Zerfällungen einer natürlichen Zahl  $n$  mit Summanden aus einer vorgegebenen Referenz-Menge, wobei die Reihenfolge der Summanden in einer solchen Figur belanglos ist. Die folgende Aufzählung zeigt die möglichen Partitionen der Zahl 20 über der Referenz-Menge  $\{2, 3, 7\}$ :

3+3+7+7  
 2+3+3+3+3+3+3  
 2+2+3+3+3+7  
 2+2+2+7+7  
 2+2+2+2+3+3+3+3  
  
 2+2+2+2+2+3+7  
 2+2+2+2+2+2+3+3  
 2+2+2+2+2+2+2+2+2

ANZAHL DER FIGUREN: 8

Die Summanden in den einzelnen Figuren sind hier nach zunehmenden Werten geordnet.

Kommt in einer Partition der Zahl  $n$  über der Referenz-Menge

$$\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$$

der Summand  $a_j$  genau  $x_j$ -mal vor, dann gilt

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p = n. \quad (1.1)$$

Die Menge der Partitionen mit den genannten Parametern erweist sich damit als äquivalent mit der Lösungsmenge der diophantischen Gleichung (1.1), wenn nicht-negative ganze Werte  $x_j$  vorausgesetzt werden. Dieser Zusammenhang macht die Partitionen zugleich zu einem Gegenstand der Zahlentheorie.

Während das Auflisten von Partitionen bislang eine recht mühsame Aufgabe war, gibt es schon lange eingehende Untersuchungen zum Abzählen von Partitionen-Mengen. Erste systematische Untersuchungen über Partitionen finden sich bei L. Euler in dessen „Introductio in Analysin infinitorum“ aus dem Jahre 1748 [1\*]. Später hat J. J. Sylvester eine generelle Abzähltheorie für Partitionen aufgestellt [2\*]. Grundsätzlich kann auf dieser Basis zu jeder Referenz-Menge für die Anzahl  $f_n$  der Partitionen von  $n$  eine Formel hergeleitet werden. Insbesondere hat Sylvester gezeigt, dass aus der Referenz-Menge  $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$  die formale Potenzreihe [3\*]

$$\frac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2})\dots(1-x^{a_p})} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \quad (1.2)$$

hervorgeht.

Die Sylvestersche Theorie ist leider mit dem Nachteil behaftet, dass sich die Bestimmung der Koeffizienten-Terme  $f_n$  mit zunehmendem Umfang der Referenz-Menge und wachsenden Werten der  $a_j$  schon bald als unpraktikabel erweist. So erhält man etwa für die Referenz-Menge  $\{1, 2, 5\}$  die abzählende Potenzreihe

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n.$$

Die Partialbruchzerlegung der linken Seite lautet mit  $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)} &= \frac{1}{10} \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{4} \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{13}{40} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{8} \frac{1}{1+x} \\ &+ \frac{1}{5} \frac{1}{(1-\omega-\omega^2+\omega^3)} \left( \frac{\omega^3}{(1-\omega x)} - \frac{\omega^2}{(1-\omega^2 x)} - \frac{\omega}{(1-\omega^3 x)} + \frac{1}{(1-\omega^4 x)} \right). \end{aligned}$$

Unter Abstützung auf die für beliebiges  $s \in \mathbb{N}$  geltende Entwicklung

$$\frac{1}{(1-ax)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+s-1}{s-1} a^n x^n$$

kann daraus die Abzähl-Formel

$$f_n = \left\lfloor \frac{(n+4)^2}{20} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

gewonnen werden [4\*]. Dieses Beispiel lässt erkennen, dass die jeweils erforderliche Partialbruchzerlegung der Reziproken zu einem Polynom ein ernsthaftes Hindernis darstellt.

Im Umgang mit Partitionen hat in den letzten Jahren der Einsatz von Computern eine gewisse Verschiebung der Akzente gebracht. Während Auflistungen von umfangreichen Partitionen-Mengen erst mit Hilfe von Computern möglich geworden sind, scheinen andererseits Abzähl-Formeln zusehends an Bedeutung zu verlieren. Die sogenannte *konstruktive Kombinatorik* ist heute auch innerhalb des Problemfeldes der Partitionen deutlich zu erkennen. Diese Entwicklung nachzeichnend möchte die vorliegende Note je einen schnellen Algorithmus für das Abzählen und das Auflisten von Partitionen über beliebigen Referenz-Mengen vorstellen.

## 2. Die Abzählung von Partitionen

Zunächst wollen wir uns mit der Abzählung der Partitionen über der Referenz-Menge

$$\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$$

im Lichte der Computer-Mathematik befassen. Insbesondere soll die endliche Anzahl-Folge

$$f_1, f_2, \dots, f_n$$

mit einem Rechner bestimmt werden. Um zu einem entsprechenden Algorithmus zu gelangen, denken wir uns die vorgegebene Referenz-Menge über die Kette

$$\{a_1\} \rightarrow \{a_1, a_2\} \rightarrow \{a_1, a_2, a_3\} \rightarrow \dots \rightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$$

schrittweise aufgebaut. Zur  $k$ -elementigen Zwischenstufe  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  möge die Anzahl-Folge

$$f_0^{(k)}, f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_n^{(k)} \quad (2.1)$$

gehören, wobei  $f_0^{(k)} := 1$  gesetzt ist. Diese Verlängerung der eigentlichen Anzahl-Folge nach links wird sich gleich als sehr zweckmässig erweisen.

Es ist jetzt

$$f_j = f_j^{(p)} \quad \text{für alle } 0 \leq j \leq n.$$

Wird nun zur Referenz-Menge  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  das Element  $a_{k+1}$  adjungiert, dann gilt für alle  $a_{k+1} \leq j \leq n$

$$f_j^{(k+1)} = f_j^{(k)} + f_{j-a_{k+1}}^{(k)} + f_{j-2a_{k+1}}^{(k)} + \dots \quad (2.2)$$

Die Summe ist jeweils so weit zu erstrecken, als der untere Index nicht-negativ ausfällt. Das Glied  $f_{j-ha_{k+1}}^{(k)}$  auf der rechten Seite zählt die Partitionen der Zahl  $j$  über



der neuen Referenz-Menge, in denen der zuletzt adjungierte Summand  $a_{k+1}$  genau  $h$ -mal vorkommt.

Die Summe (2.2) kann mit dem Glied  $f_0^{(k)}$  endigen, nämlich dann, wenn es zur Zahl  $j$  genau eine Partition mit lauter Summanden  $a_{k+1}$  gibt. Eine allenfalls vorhandene Figur dieser Art wird jetzt aufgrund der zuvor eingeführten Ergänzungswerte  $f_0^{(k)} = 1$  korrekt mitgezählt.

Bei Verwendung der Programmier-Sprache BASIC können die mit dem Übergang von  $k$  zu  $k+1$  anfallenden Summen (2.2) durch folgende FOR-NEXT-Schleife herbeigeführt werden:

```
FOR J = A(K + 1) TO N
  F(J) = F(J) + F(J - A(K + 1))
NEXT J
```

(2.3)

Ist etwa  $a_{k+1} = 5$  und  $n = 20$ , dann bewirkt (2.3) die Ersetzungen

$$\begin{aligned} f_5 &:= f_5 + f_0 \\ f_6 &:= f_6 + f_1 \\ f_7 &:= f_7 + f_2 \\ f_8 &:= f_8 + f_3 \\ f_9 &:= f_9 + f_4 \\ f_{10} &:= f_{10} + f_5 \\ &\vdots \\ f_{20} &:= f_{20} + f_{15} \end{aligned}$$

Da diese Ersetzungen in der notierten Reihenfolge realisiert werden, folgt daraus z. B.

$$f_{20}^{(k+1)} = f_{20}^{(k)} + f_{15}^{(k)} + f_{10}^{(k)} + f_5^{(k)} + f_0^{(k)}$$

und dies ist die Summe (2.2) für  $j = 20$ .

Es zeichnet sich jetzt die Möglichkeit ab, die Zahlen

$$f_0^{(p)}, f_1^{(p)}, \dots, f_n^{(p)}$$

rekursiv zu berechnen. Wird die Referenz-Menge in DATA-Zeilen abgelegt, dann kann die massgebende Anzahl-Folge über das anschließend in SIMONS-BASIC [5\*] notierte Rechner-Programm aufgebaut werden:

```
DIM F(N)
F(0) = 1
K = 1
LOOP
READ A
EXIT IF A > N
FOR J = A TO N
  F(J) = F(J) + F(J - A)
NEXT J
```

```

K = K + 1
EXIT IF K > P
END LOOP
:
DATA P
DATA A(1), A(2), ..., A(P)

```

Als Start-Folge ist

$$f_0^{(0)} := 1, f_1^{(0)} := 0, f_2^{(0)} := 0, \dots, f_n^{(0)} := 0$$

zu wählen; dazu sind die Anweisungen

```
DIM F(N): F(0) = 1
```

erforderlich.

Bei einem vorgegebenen maximalen Index  $n$  kommen nur jene Elemente der Referenz-Menge zum Tragen, die kleiner als  $n$  sind. Setzt man eine Anordnung der Referenz-Menge in den entsprechenden DATA-Zahlen nach aufsteigenden Werten voraus, dann kann man die LOOP-Schleife verlassen, sobald  $a > n$  ist (EXIT IF  $A > N$ ).

Im anschliessenden Rechner-Programm ist die Referenz-Menge

{1, 2, 5, 10, 20, 50}

enthalten (DATA-Zahlen 1850 und 1890).

### Rechner-Programm 1

```

1000 REM *****
1010 REM * ANZAHL DER PARTITIONEN *
1020 REM * UEBER EINER REFERENZ-MENGE *
1030 REM * [A1,A2,...,AP] *
1040 REM * *
1050 REM * A1<A2<...<AP *
1060 REM *****
1070 :
1080 :
1090 REM INFORMATION
1100 PRINT CHR$(147)
1110 PRINT"DIE ELEMENTE DER"
1120 PRINT"REFERENZ-MENGE"
1130 PRINT"SIND IN DATA-ZEILEN"
1140 PRINT"ABZULEGEN !"
1150 PRINT
1160 :
1170 :
1180 REM EINGABE
1190 PRINT"BIS ZU WELCHEM INDEX N"
1200 PRINT"SOLL DIE FOLGE DER"
1210 PRINT"PARTITIONS-ZAHLEN"
1220 PRINT"BESTIMMT WERDEN ?"
1230 PRINT
1240 INPUT"INDEX N EINGEBEN":N
1250 TI$="000000"

1260 PRINT CHR$(147)
1270 :
1280 :
1290 REM LEGENDE
1300 PRINT SPC(2)"PARTITIONEN UEBER DER"
1310 PRINT SPC(2)"REFERENZ-MENGE"
1320 PRINT
1330 :
1340 :
1350 REM PARTITIONSZAHLEN BERECHNEN
1360 DIM F(N)
1370 READ P
1380 F(0)=1
1390 K=1: R$="[ "
1400 LOOP
1410 READ A
1420 A$=STR$(A): L=LEN(A$)
1430 EXIT IF A>N
1440 R$=R$+RIGHT$(A$,L-1)+" "
1450 : FOR J=A TO N
1460 : F(J)=F(J)+F(J-A)
1470 : NEXT J
1480 K=K+1
1490 EXIT IF K>P
1500 END LOOP
1510 :

```

```

1520 ;
1530 REM REFERENZ-MENGE AUSDRUCKEN
1540 L=LEN(R$)
1550 R$=LEFT$(R$,L-1)+" "
1560 PRINT SPC(5)R$
1570 PRINT
1580 ;
1590 ;
1600 REM TABELLE AUSDRUCKEN
1610 PRINT SPC(4)"INDEX";
1620 PRINT SPC(2)"PARTITIONSZAHL"
1630 PRINT
1640 EXEC OUTPUT
1650 PRINT
1660 PRINT"  RECHENZEIT:";SPC(2)TI$
1670 END
1680 ;
1690 ;
1700 REM PROZEDUR OUTPUT
1710 PROC OUTPUT
1720 U=0
1730 FOR I=1 TO N
1740 U=U+1
1750 I$=STR$(I); L=LEN(I$)
1760 PRINT SPC(8-L)I$;
1770 F$=STR$(F(I)); L=LEN(F$)
1780 PRINT SPC(10-L)F$
1790 IF FRAC(U/5)=0 THEN PRINT
1800 NEXT I
1810 END PROC
1820 ;
1830 ;
1840 REM UMFANG DER REFERENZ-MENGE
1850 DATA 6
1860 ;
1870 ;
1880 REM ELEMENTE DER REFERENZ-MENGE
1890 DATA 1,2,5,10,20,50

```

Mit dem vorliegenden Programm kann das folgende *Geldwechsel-Problem* gelöst werden.

**Aufgabe 1:** In der Schweiz gibt es sogenannte Scheide-Münzen zu 1, 2, 5, 10, 20 und 50 Rappen. Auf wieviele Arten kann man mit solchen Geldstücken Beträge von 10, 20, ..., 100 Rappen zusammenstellen?

Hier sind zur genannten Referenz-Menge nur die Zahlen  $f_{10}, f_{20}, \dots, f_{100}$  gesucht. Man kann den Output auf diese Teilmenge beschränken, indem man die Zeile 1730 in der Ausgabe-Prozedur wie folgt ersetzt:

```
1730 FOR I=10 TO N STEP 10.
```

Dem Drucker-Output kann entnommen werden, dass etwa der Betrag von 1 Franken auf  $f_{100} = 4562$  Arten in Kleingeld ausbezahlt werden kann.

PARTITIONEN UEBER DER  
REFERENZ-MENGE

[1,2,5,10,20,50]

INDEX PARTITIONSZAHL

10	11
20	41
30	105
40	236
50	451

60	793
70	1311
80	2064
90	3121
100	4562

RECHENZEIT: 000008

PARTITIONEN UEBER DER  
REFERENZ-MENGE

[1,2,5,10,20,50,100,500,1000]

INDEX PARTITIONSZAHL

500	5829072
1000	290720619

RECHENZEIT: 000191

Bemerkenswert ist die effektive Rechenzeit von nur 8 Sekunden; man hat sich zu vergegenwärtigen, dass auch dem verkürzten Output eine 100-gliedrige Anzahl-Folge zugrunde liegt, die vollständig berechnet werden muss. Wir haben es hier offensichtlich mit einem sehr schnellen Algorithmus zu tun.

Der Übergang zu einer andern Referenz-Menge kann durch entsprechendes Überschreiben der DATA-Zeilen vorgenommen werden.

**Aufgabe 2:** Auf wieviele Arten kann man Beträge von 500 Franken und 1000 Franken mit Münzen zu 1, 2 und 5 Franken und Noten zu 10, 20, 50, 100, 500 und 1000 Franken zusammenstellen?

Die massgebende Referenz-Menge ist jetzt

$$\{1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 500, 1000\}.$$

Mit der modifizierten Anweisung

FOR I = 500 TO 1000 STEP 500

in der Ausgabe-Prozedur werden die beiden gesuchten Zahlen ausgedruckt.

Es sei darauf hingewiesen, dass mit dem präsentierten Rechner-Programm auch beim *Ausdrucken der Referenz-Menge* nur jene Elemente berücksichtigt werden, die noch in die vorgesehene Anzahl-Folge  $f_1, f_2, \dots, f_n$  eingehen.

Im Zentrum des dargelegten Abzähl-Algorithmus stehen die mit elementaren Überlegungen gewonnenen Beziehungen (2.2). Wir wollen diese abschliessend auch noch mit dem Abzählverfahren in Verbindung bringen, das mit Potenzreihen arbeitet. Verpackt man die unendliche Folge

$$f_0^{(k)}, f_1^{(k)}, \dots, f_j^{(k)}, \dots$$

in die Potenzreihe

$$\varphi_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(k)} x^j,$$

dann beinhalten die Beziehungen (2.2) die Rekursionsformel

$$\varphi_{k+1}(x) = (1 + x^{a_{k+1}} + x^{2a_{k+1}} + \dots) \varphi_k(x) = \left( \frac{1}{1 - x^{a_{k+1}}} \right) \varphi_k(x).$$

Wegen  $f_0^{(0)} = 1$ ,  $f_j^{(0)} = 0$  für  $j > 0$  ist  $\varphi_0(x) = 1$  und damit

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{1 - x^{a_1}} \frac{1}{1 - x^{a_2}} \cdots \frac{1}{1 - x^{a_p}}$$

womit die Sylvestersche Reihe für die Partitionen über der Referenz-Menge  $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$  hergeleitet ist.

Unser Algorithmus ist ausgelegt auf die Berechnung der endlichen Folge

$$f_0^{(p)}, f_1^{(p)}, \dots, f_n^{(p)}.$$

Diese Zahlen sind die Koeffizienten des sogenannten *Vorpolynoms vom Grad  $n$*  [6\*]

$$\varphi_p^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^n f_j^{(p)} x^j$$

der Potenzreihe  $\varphi_p(x)$ .

Der hier entwickelte Algorithmus kann übrigens leicht so modifiziert werden, dass die *Partitionen der Zahlen  $1, 2, 3, \dots, n$  mit genau  $s$  Summanden* aus der Referenz-Menge  $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$  abgezählt werden. Auch dies ist eine Problemstellung der abzählenden Kombinatorik, der man sich gelegentlich gegenübergestellt sieht. Da dieses neue Abzählproblem eine 2-parametriges Abzähl-Folge impliziert, ist zu Beginn ein entsprechendes 2-dimensionales Parameter-Feld zu reservieren. Der Kern des modifizierten Programmes lautet dann wie folgt:

```

DIM F(N, S)
F(0, 0) = 1
K = 1
LOOP
  READ A
  EXIT IF A > N
  FOR H = 1 TO S
    FOR J = A TO N
      F(J, H) = F(J, H) + F(J - A, H - 1)
    NEXT J
  NEXT H
  K = K + 1
  EXIT IF K > P
END LOOP
:
DATA P
DATA A(1), A(2), ..., A(P)

```

Anstelle von (2, 2) ist nämlich jetzt die Rekursionsformel

$$f_{(j, h)}^{(k+1)} = f_{(j, h)}^{(k)} + f_{(j-a_{k+1}, h-1)}^{(k)} + f_{(j-2a_{k+1}, h-2)}^{(k)} + \dots \quad (2.4)$$

zuständig. Die Summe ist jeweils soweit zu erstrecken, als im Paar  $(j - r \cdot a_{k+1}, h - r)$  beide Komponenten nicht-negativ ausfallen.

Gezählt werden mit dem neuen Algorithmus zugleich die Lösungen des diophantischen Gleichungssystems

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p = j \quad (2.5)$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p = s$$

für  $j = 1, 2, \dots, n$ .

### 3. Die Auflistung von Partitionen

Unser nächstes Ziel ist ein schneller Algorithmus für die Auflistung der Partitionen zur Zahl  $n$  über der Referenz-Menge  $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$  in der Form der Lösungsvektoren

$$(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

von (1.1). Wie in der Kombinatorik üblich, wollen wir fortan den Parameter  $n$  als Index der betreffenden Figuren bezeichnen.

Jede Auflistung einer Figuren-Menge setzt die Festlegung einer bestimmten Reihenfolge voraus. Der Auflist-Algorithmus besteht dann im wesentlichen in der Konstruktion des Nachfolgers zu einer beliebigen Figur in der Liste. Im vorliegenden Falle entscheiden wir uns für die *rückläufige lexikographische Anordnung* der Lösungsvektoren, weil diese mit einer relativ einfachen Nachfolger-Konstruktion einhergeht.

Beim gewählten Auflist-Konzept ergibt sich für die Referenz-Menge  $\{2, 3, 5, 7\}$  zum Index  $n = 18$  der folgende Computer-Output:

```
PARTITIONEN VOM INDEX N= 18
UEBER DER REFERENZ-MENGE:
```

```
[ 2 , 3 , 5 , 7 ]
```

```
FIGUREN:
```

```
( 9, 0, 0, 0 )
( 6, 2, 0, 0 )
( 3, 4, 0, 0 )
( 0, 6, 0, 0 )
( 5, 1, 1, 0 )
```

```
( 2, 3, 1, 0 )
( 4, 0, 2, 0 )
( 1, 2, 2, 0 )
( 0, 1, 3, 0 )
( 4, 1, 0, 1 )
```

```
( 1, 3, 0, 1 )
( 3, 0, 1, 1 )
( 0, 2, 1, 1 )
( 2, 0, 0, 2 )
```

```
ANZAHL FIGUREN: 14
```

```
RECHENZEIT:000006
```

Wir wollen daran die anschliessend dargelegte Nachfolger-Konstruktion exemplarisch einsichtig machen.

Um von einem bestimmten Lösungsvektor

$$(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

zum Nachfolger zu gelangen, suche man zunächst den kleinsten Komponenten-Index  $j > 1$  auf mit der Eigenschaft, dass  $x_j$  unter alleiniger Berücksichtigung der gerade vorhandenen Werte von  $x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_p$  um eine Einheit erhöht werden kann.

Ein solcher Sprung an der Stelle  $j$  ist genau dann möglich, wenn

$$a_j(x_j + 1) \leq n - \sum_{h=j+1}^p a_h x_h \quad (3.1)$$

ist. Die entsprechende Abfrage legt die Einführung des Rechen-Parameters

$$s = \sum_{h=j+1}^p a_h x_h$$

nahe, dessen Wert mit jeder Änderung von  $j$  nachzuführen ist. Sobald der Sprung-Index  $j$  feststeht, sind die Anweisungen

$$x_1 := (n - s)/a_1, x_2 := 0, x_3 := 0, \dots, x_{j-1} := 0 \quad \text{und} \quad j := 1$$

vorzunehmen. Falls nun  $x_1$  ganzzahlig ausfällt, ist die Nachfolger-Figur gefunden. Andernfalls benutze man den erhaltenen nicht-zulässigen Vektor als neue Start-Figur.

Beim vorangestellten Beispiel kann etwa im Lösungsvektor  $(0, 1, 3, 0)$  erst die 4. Komponente um eine Einheit erhöht werden. Nach Ausführung dieses Sprunges gelangt man zum Vektor  $(11/2, 0, 0, 1)$ . Da dessen erste Komponente nicht ganzzahlig ist, hat man von diesem Vektor ausgehend den nächsten Sprung-Index aufzusuchen; dieser liegt bei  $j = 2$ . Die Ersetzung  $x_2 := x_2 + 1$  ergibt nun den Vektor  $(8/2, 1, 0, 1)$  und dies ist die nächste Figur in der Liste.

Die gegebene verbale Umschreibung des Auflist-Algorithmus kann nun sofort in ein Fluss-Diagramm umgesetzt werden (siehe Seite 166).

Da unserem Auflist-Algorithmus eine auf wenigen Rechenschritten beruhende Nachfolger-Konstruktion zugrunde liegt, sind relativ kurze Rechenzeiten zu erwarten. Das vorangestellte Rechenbeispiel bestätigt diese Vermutung.

#### 4. Die freien Partitionen

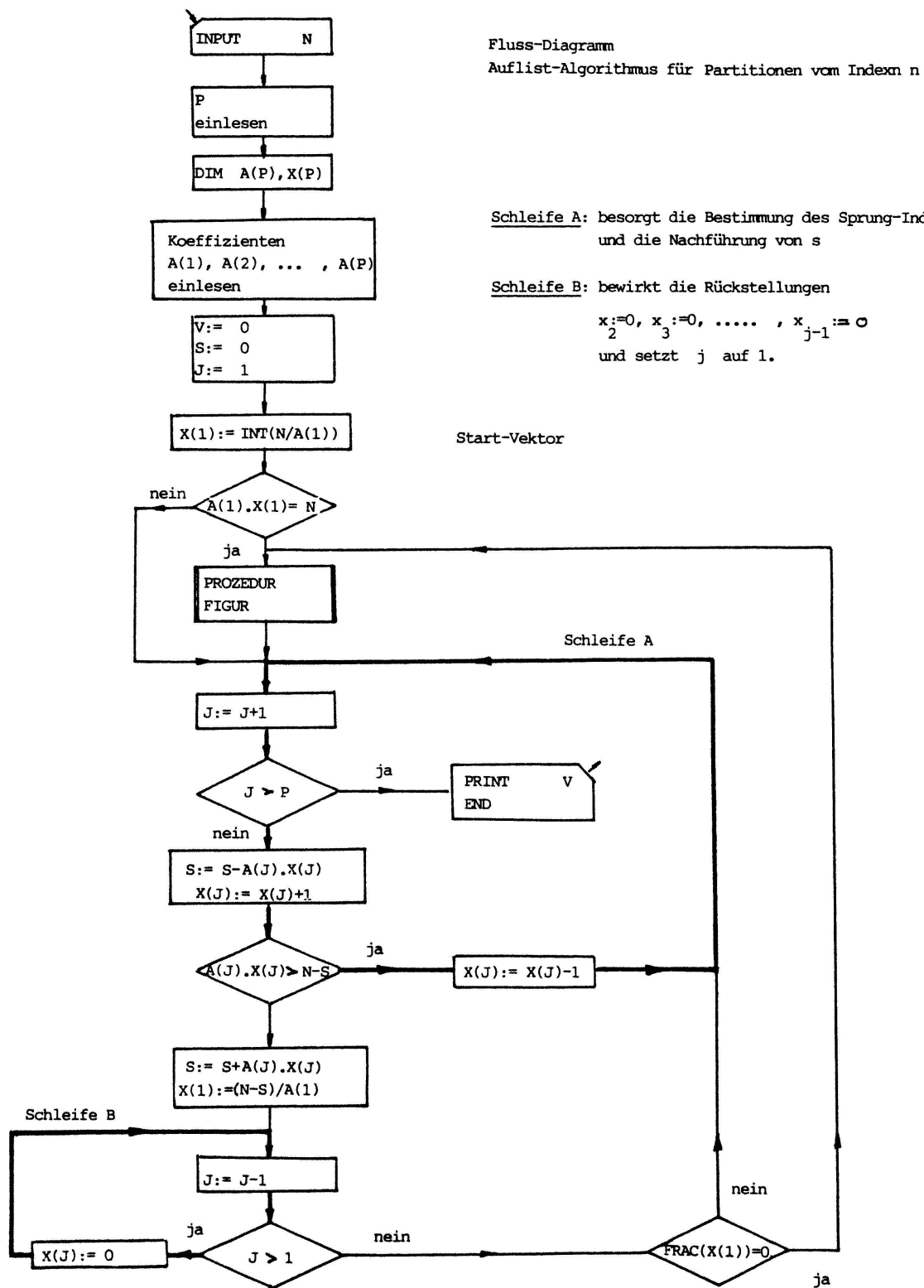
Bis jetzt wurden nur Partitionen über einer Referenz-Menge

$$R = \{a_1, a_2, \dots, a_p\} \subset N$$

betrachtet, d.h.  $R$  war eine endliche Teilmenge von  $N$ . Wir lassen nun die Beschränkung auf Teilmengen von  $N$  fallen und setzen  $R = N$ . Man spricht dann von *freien Partitionen vom Index  $n$* . Bei dieser Öffnung der Referenzmenge tritt an die Stelle von (1.1) die diophantische Gleichung

$$x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = n. \quad (4.1)$$

## Fluss-Diagramm

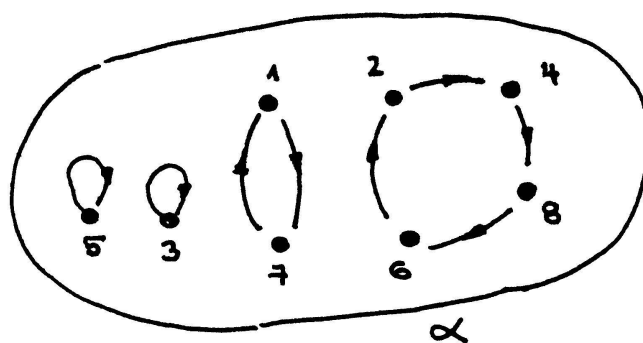
Auflist-Algorithmus für Partitionen vom Index  $n$ 



Grössere Summanden als  $n$  können nämlich bei einer additiven Zerfällung der Zahl  $n$  nicht auftreten, d.h. bei den freien Partitionen vom Index  $n$  kommen jeweils nur die Summanden aus  $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$  zum Tragen.

Die Gleichung (4.1) ist in verschiedenen Gebieten der Mathematik anzutreffen. So beschreibt z.B. jeder Lösungsvektor von (4.1) eine mögliche Zyklen-Struktur in der Gruppe  $\mathfrak{S}_n$  der Permutationen von  $n$  Objekten (symmetrische Gruppe vom Grad  $n$ ).

Zyklen-Struktur (2, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)



Figur 1.

Die Fig. 1 zeigt den Di-Graphen zu einer Permutation  $\alpha$  aus  $\mathfrak{S}_8$  mit der Zyklen-Struktur (2, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), d.h.  $\alpha$  zerfällt in 2 Zyklen der Länge 1 und je einen Zyklus der Längen 2 und 4.

Wir betrachten jetzt die Anzahl der Lösungen von (4.1) in nicht-negativen ganzen Zahlen mit  $p_n$ . Mit der Folge der *Partitionszahlen*

$$p_0, p_1, p_2, \dots, p_n, \dots \quad (p_0 := 1)$$

werden aufgrund der letzten Bemerkungen zugleich die Zyklen-Strukturen in den Gruppen  $\mathfrak{S}_n$  abgezählt. Andererseits weist diese Folge auch mancherlei Bezüge zur Zahlentheorie auf [7\*].

Die beiden präsentierten Algorithmen für die Abzählung und für die Auflistung von Partitionen über endlichen Referenz-Mengen können problemlos auf die freien Partitionen übertragen werden.

Für das Abzählen der Figuren bis zu einem vorgegebenen Höchstindex  $n$  reicht  $N_n$  als Referenz-Menge aus. Diese kann jetzt zusammen mit der Konstruktion der Koeffizienten  $f_j^{(k)}$  sukzessive hineingebracht werden, was die früheren DATA-Zeilen entbehrlich macht. Der Abschnitt des Rechner-Programms, der den mathematischen Kern des Algorithmus enthält, ist dann wie folgt zu modifizieren:

## Rechner-Programm 2

```

1350 REM HAUPTPROGRAMM
1360 DIM P(N)
1370 P(0)=1: A=0
1380 LOOP
1390 A=A+1
1400 EXIT IF A>N
1410 : FOR J=A TO N
1420 : P(J)=P(J)+P(J-A)
1430 : NEXT J
1440 END LOOP
1450 EXEC OUTPUT
1460 PRINT
1470 PRINT RECHENZEIT: ;SPC(2)TI$
1480 END

```

Darin sind die früheren Parameter  $f_j$  in Anpassung an die neue Bezeichnungsweise durch  $p_j$  ersetzt. Der anschliessende Rechner-Output zeigt eine Tafel der ersten 100 Partitionszahlen ( $n = 100$ ). Bemerkenswert ist wiederum die kurze Rechenzeit von nur 1'20" (Rechner Commodore C 64).

ANZAHL DER  
FREIEN PARTITIONEN  
VOM INDEX N

INDEX PARTITIONENZAHL

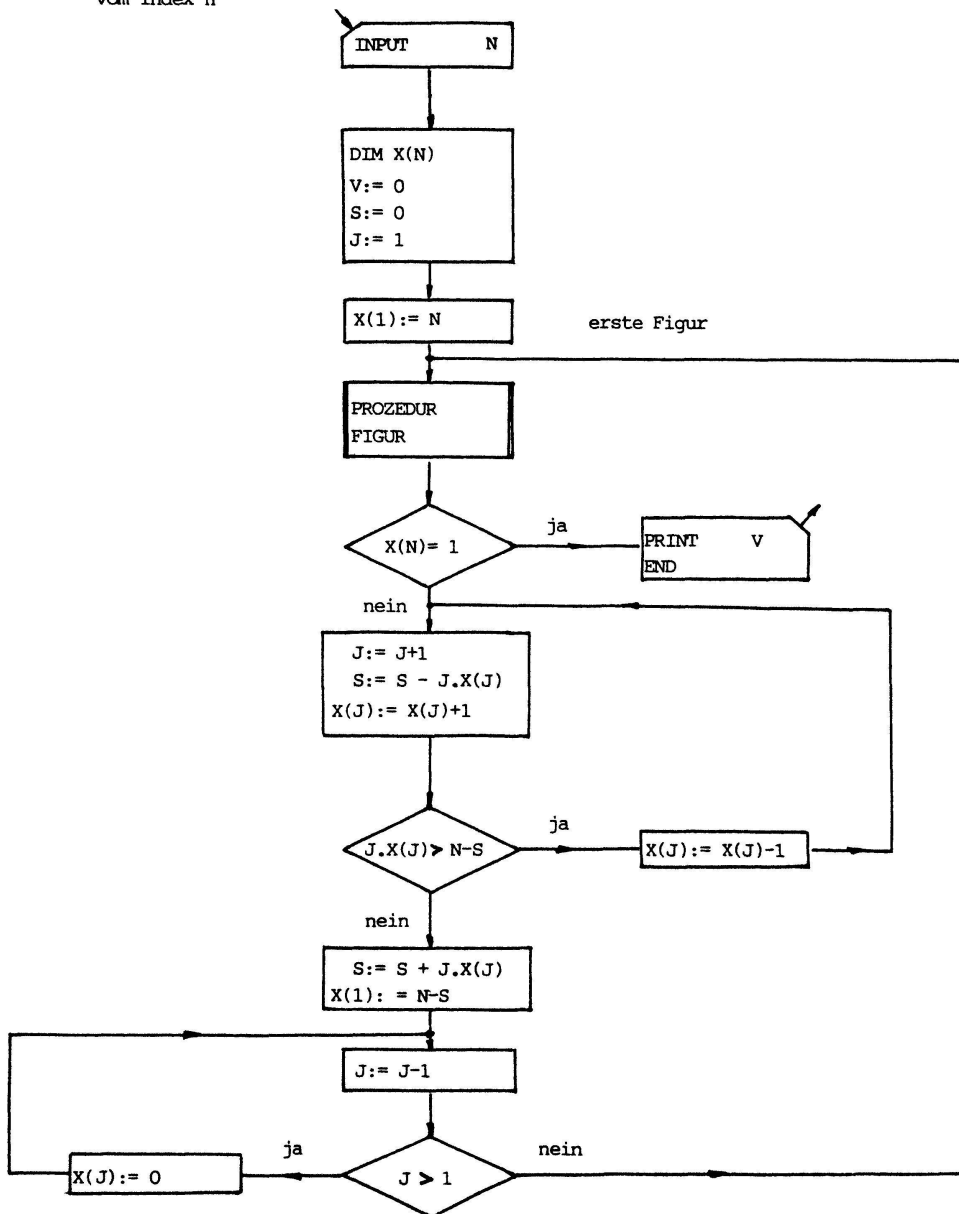
1	1	41	44583	71	4637205
2	2	42	53174	72	5332783
3	3	43	63261	73	6185689
4	5	44	75175	74	7083500
5	7	45	89134	75	8118264
6	11	46	105558	76	9283031
7	15	47	124754	77	10613863
8	22	48	147273	78	12132164
9	30	49	173525	79	13848650
10	42	50	204226	80	15736476
11	58	51	239343	81	18004327
12	77	52	281583	82	20506255
13	101	53	323331	83	23338463
14	135	54	366155	84	26543660
15	176	55	41276	85	30167357
16	231	56	526823	86	34262362
17	297	57	614154	87	38887673
18	385	58	715220	88	44188103
19	490	59	831820	89	49355325
20	627	60	966467	90	56634173
21	792	61	1121505	91	64112359
22	1002	62	1300156	92	72533807
23	1255	63	1505433	93	82018177
24	1575	64	1741630	94	92663720
25	1958	65	2012558	95	104651413
26	2436	66	2323520	96	118114304
27	3010	67	2673883	97	133230330
28	3718	68	3067735	98	150138136
29	4565	69	3554345	99	169223875
30	5604	70	4087388	100	190565232
31	6842				
32	8343				
33	10143				
34	12310				
35	14863				
36	17377				
37	21037				
38	26015				
39	31185				
40	37338				

RECHENZEIT: 000126

Im Auflist-Algorithmus für die Figuren vom Index  $n$  können im Falle der freien Partitionen verschiedene Vereinfachungen vorgenommen werden. Zum einen sind jetzt die erste und die letzte Figur in der Liste bekannt: Am Anfang der Liste steht

nämlich der Lösungsvektor  $(n, 0, 0, \dots, 0, 0)$  und Schluss-Figur ist jeweils der Lösungsvektor  $(0, 0, 0, \dots, 0, 1)$ . Andererseits ist der berechnete Wert von  $x_1$  wegen der besonderen Struktur der Gleichung (4.1) immer ganzzahlig, so dass die entsprechende Abfrage auf Ganzzahligkeit entfallen kann. Der aufgrund dieser Überlegungen verkürzte Auflist-Algorithmus für die freien Partitionen vom Index  $n$  ist im anschliessenden Fluss-Diagramm festgehalten.

Fluss-Diagramm  
Algorithmus für die Auflistung der freien Partitionen  
vom Index n



FREIE PARTITIONEN  
VON INDEX N

**N= 18**

**FIGUREN:**

```
(10, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
( 9, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
( 6, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
( 4, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
( 2, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
```

```
( 0, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
( 7, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
( 5, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
( 3, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
( 1, 3, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
```

```
( 4. 0. 2. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.)
( 2. 1. 2. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.)
( 0. 2. 2. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.)
( 1. 0. 3. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.)
( 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 0. 0. 0.)
```

```
( 4, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
( 2, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
( 0, 3, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
( 3, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
( 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
```

```
( 0, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
( 2, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
( 0, 1, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
( 5, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)
( 3, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)
```

```
( 1. 2. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 0. 0.)
( 2. 0. 1. 0. 1. 0. 0. 0. 0. 0.)
( 0. 1. 1. 0. 1. 0. 0. 0. 0. 0.)
( 1. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 0. 0. 0.)
( 0. 0. 0. 0. 2. 0. 0. 0. 0. 0.)
```

```
( 4. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 0.)
( 2. 1. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 0.)
( 0. 2. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 0.)
( 1. 0. 1. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 0.)
( 0. 0. 0. 1. 0. 1. 0. 0. 0. 0.)
```

```
( 3, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)
( 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)
( 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)
( 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)
( 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)
```

```
( 1. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 0 )
( 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1 )
```

ANZAHL FIGUREN: 92

RECHENZEIT: 000020

## 5. Frankatur-Probleme

Mit den beiden Primär-Algorithmen können auch noch gewisse Fragen aus der Kombinatorik geklärt werden, die auf den ersten Blick nicht mehr zum Problemfeld der Partitionen zu gehören scheinen. Als Aufhänger für die folgenden Schlussbetrachtungen diene die

**Aufgabe 3:** Die schweizerische Postverwaltung hat zu einem gewissen Zeitpunkt 5 verschiedene 10-Rappen-Marken und 3 verschiedene 20-Rappen-Marken im Umlauf. Auf wieviele und auf welche Arten kann man damit ein Porto im Betrage von 50 Rappen zusammenstellen?

Hier geht es offenbar um die Lösungsmenge der diophantischen Gleichung

$$10x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 10x_4 + 10x_5 + 20x_6 + 20x_7 + 20x_8 = 50,$$

die sofort durch die äquivalente Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 + 2x_8 = 5$$

ersetzt werden kann.

Da die Frankatur-Werte 10 und 20 in mehreren Marken-Typen zur Verfügung stehen, hat man es auf Anhieb nicht mit Partitionen im bisherigen Sinne zu tun. Man kann aber die vorliegenden kombinatorischen Figuren dennoch als Partitionen interpretieren, wenn man die den verschiedenen Marken-Typen entsprechenden Summanden mit einem spezifischen Etikett versieht. Dazu kann man z.B. die Farben der einzelnen Briefmarken verwenden. Auf diese Weise lässt sich eine Referenz-Menge definieren, die etwa aus je einer Zahl 10 mit dem Etikett rot, blau, gelb, grün und violett und aus je einer Zahl 20 mit dem Etikett rot, blau und gelb besteht. Das bisherige Figuren-Modell wird damit auch auf die neue Situation anwendbar.

In Anlehnung an die Einkleidung in der Aufgabe 3 spricht man bei Vorliegen einer Referenz-Menge mit „verschieden gefärbten“ gleichwertigen Elementen von einem *Frankatur-Problem*.

Der folgende Drucker-Output (linker Teil) zeigt die zur diophantischen Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 + 2x_8 = n$$

PARTITIONEN ÜBER DER  
REFERENZ-MENGE

[1,1,1,1,1,2,2,2]

INDEX PARTITIONENZAHL

0	1
1	5
2	10
3	50
4	121

5	261
6	520
7	500
8	1710
9	2000

10	4032
11	7300
12	11200
13	16030
14	24552

15	35112
16	43335
17	60211
18	32350
19	124302

20	100020
----	--------

RECHENZEIT: 000003

PARTITIONEN ÜBER DER  
REFERENZ-MENGE

[1,1,1,1]

INDEX PARTITIONENZAHL

0	1
1	4
2	10
3	20
4	35

5	56
6	84
7	120
8	165
9	220

10	290
11	364
12	455
13	560
14	680

15	810
16	960
17	1140
18	1330
19	1540

20	1771
----	------

RECHENZEIT: 000002

gehörende Anzahl-Folge bis zum Höchst-Index  $n = 20$ . Insbesondere kann man daraus entnehmen, dass  $f_5 = 261$  ist; es gibt also 261 verschiedene Frankaturen, die den Forderungen der Aufgabe 3 genügen. Mit dem Auflist-Algorithmus gemäss Abschnitt 3 könnten diese 261 Figuren problemlos aufgezählt werden (siehe Seite 170).

Auch die spezielle diophantische Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p = n, \quad x_i \in N \cup \{0\} \quad (5.1)$$

kann mit unsern beiden Algorithmen erschlossen werden. In diesem Falle lassen sich die Lösungen auch mit ganz elementaren Überlegungen abzählen.

Steht etwa die Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

zur Diskussion, dann betrachte man die sämtlichen Wörter aus 10 Zeichen 1 und 3 Zeichen /. Jedes dieser Wörter repräsentiert offenbar gerade eine Lösung unserer Gleichung, was sofort aus den folgenden Beispielen abgelesen werden kann:

$$\underbrace{1\ 1}_{2} / \underbrace{1\ 1}_{2} / \underbrace{\quad}_{0} / \underbrace{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1}_{6} \rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 6$$

$$/ \underbrace{1\ 1\ 1}_{3} / \underbrace{1\ 1\ 1\ 1\ 1}_{5} / \underbrace{1\ 1}_{2} \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = 2$$

$$\underbrace{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1}_{10} / / / \rightarrow x_1 = 10, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0$$

Bei der allgemeinen Gleichung (5.1) wird man auf Wörter der Länge  $n + p - 1$  geführt, die aus genau  $n$  Zeichen 1 und  $p - 1$  Zeichen / bestehen. Die Anzahl derartiger Wörter ist

$$f_n = \binom{n + p - 1}{p - 1}. \quad (5.2)$$

Mit unserem Abzähl-Algorithmus kann also insbesondere auch die Folge der *Binomial-Koeffizienten mit fester Unterzahl* erzeugt werden. Bemerkenswert ist, dass man dabei ohne irgendwelchen formalen Zusammenhang über Binomialkoeffizienten auskommt. Der letzte Drucker-Output zeigt einen Teil der Folge (5.2) für  $p = 4$ .

Die Lösungen der diophantischen Gleichung (5.1) beinhalten *additive Zerfällungen der Zahl  $n$  in genau  $p$  Summanden* über der Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen,

wobei jetzt deren *Reihenfolge mitberücksichtigt* wird. So sind jetzt etwa  $2 + 3 + 0 + 5$  und  $3 + 5 + 0 + 2$  zwei verschiedene Zerfällungen der Zahl 10. Additive Zerfällungen unter Berücksichtigung der Summanden-Reihenfolge werden in der Kombinatorik als *Kompositionen* bezeichnet.

M. Jeger, Mathematik-Departement ETH Zürich

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] G. E. Andrews: The Theory of Partitions. Encyclopedia of Mathematics and its applications, Vol. 2. London-Amsterdam-Don Mills-Sydney-Tokyo 1976.
- [2] L. Comtet: Advanced Combinatorics. Dordrecht 1974.
- [3] G. H. Hardy and E. M. Wright: An Introduction to the Theory of Numbers. New York 1960<sup>4</sup>.
- [4] M. Jeger: Einführung in die Kombinatorik, Bd. 2. Stuttgart 1976.
- [5] D. E. Knuth: The Art of Computer Programming, Vol. 1 (Fundamental Algorithms). Menlo Park-London-Amsterdam-Don Mills-Sydney 1968.
- [6] E. Netto: Lehrbuch der Combinatorik. Leipzig 1901.
- [7] A. Nijenhuis and H. S. Wilf: Combinatorial Algorithms. New York 1975.
- [8] D. Stanton and D. White: Constructive Combinatorics. New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo 1986.

#### ANMERKUNGEN

- [1\*] Vgl. L. Euler: Opera Omnia I,8. Leipzig-Berlin 1922.
- [2\*] Vgl. [6], p. 147 ff.
- [3\*] Vgl. etwa [4], p. 11 ff.
- [4\*] Vgl. [4], p. 104/105.
- [5\*] SIMONS-BASIC ist eine auf den Rechner Commodore C-64 zugeschnittene BASIC-Erweiterung, die ein strukturiertes Programmieren erlaubt. Diese BASIC-Version bietet zudem direkte Befehle für die Graphik-Programmierung an.
- [6\*] Vgl. [4], p. 14 ff.
- [7\*] Vgl. [4], p. 119–122 oder auch [3].

## Aufgaben

**Aufgabe 950.** Man bestimme den kleinsten Wert, den der Durchmesser (d. i. der maximale Abstand von zwei Punkten) einer ebenen nichtkollinearen Menge von vier Punkten mit paarweise ganzzahligen Abständen annehmen kann.

H. Harborth, Braunschweig, BRD

**Lösung:** Der gesuchte kleinste Wert ist 4. Tatsächlich haben beide Diagonalen des gleichschenkligen Trapezes mit Länge 3 bzw. 4 der parallelen Seiten sowie Schenkel-länge 2 die Länge 4, womit der Durchmesser dieses Trapezes gleich 4 ist.