

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 42 (1987)
Heft: 5

Artikel: Ceva-Dreiecke
Autor: Seebach, K.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-40041>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

- 5 M. Jovanović: Inequalities for the triangle. These Publications N° 412–460, 155–157 (1973).
 6 D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, V. Volenec: Recent advances in geometric inequalities (the book) (to appear).
 7 M. Petrović: Računanje sa brojnim razmacima. Gradjevinska knjiga, Beograd 1969.

© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/87/050000-00\$1.50+0.20/0

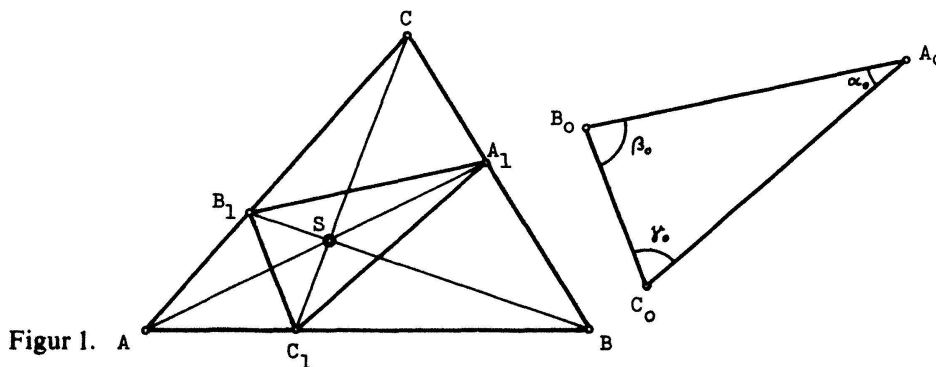
Ceva-Dreiecke

Ein in einem Dreieck ABC einbeschriebenes Dreieck $A_1B_1C_1$ (Fig. 1) möge *Ceva-Dreieck* heissen, wenn sich die drei Transversalen AA_1 , BB_1 , CC_1 in einem Punkt S schneiden. Nach dem Satz von Ceva tritt dies genau dann ein, wenn die drei Teilverhältnisse

$$[ABC_1] = -\tau < 0; \quad [BCA_1] = -\varrho < 0; \quad [CAB_1] = -\sigma < 0 \quad (1)$$

der Gleichung genügen

$$\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = 1. \quad (2)$$



Figur 1. A

Im folgenden soll gezeigt werden:

Satz 1: Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC und ein ebenfalls beliebiges Dreieck $A_0B_0C_0$ (Fig. 1). Dann gibt es genau ein dem Dreieck ABC einbeschriebenes Ceva-Dreieck $A_1B_1C_1$, das dem Dreieck $A_0B_0C_0$ ähnlich ist.

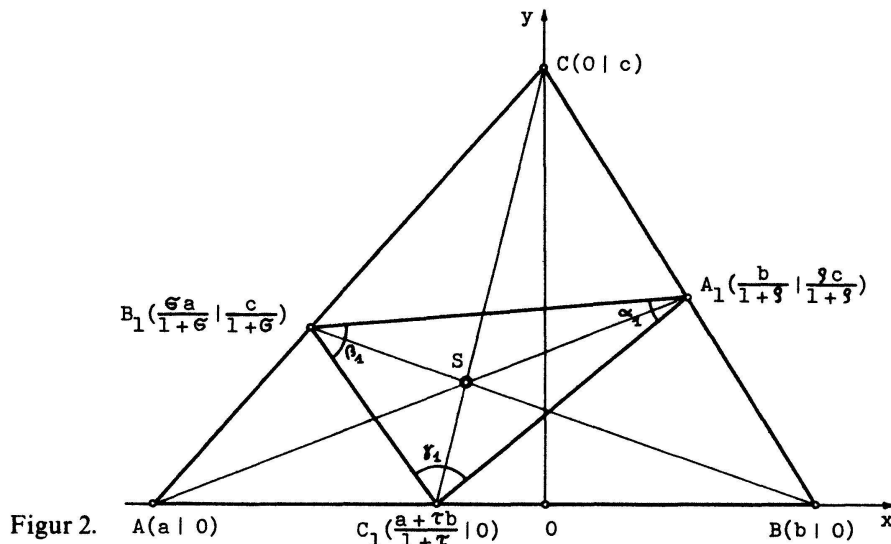
Beweis: Zunächst weisen wir die Existenz eines solchen Dreiecks $A_1B_1C_1$ nach. Dazu führen wir ein Koordinatensystem ein, das dem vorgegebenen Dreieck ABC nach Fig. 2 angepasst ist.

Aus der Figur können die Bezeichnungen für die Masszahlen der Winkel (im Bogenmass) sowie die Koordinaten der Punkte (in Abhängigkeit von den Teilverhältnissen ϱ , σ , τ) abgelesen werden. Dabei dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass

$$b, c, b-a \in \mathbf{R}^+; \quad a \in \mathbf{R}; \quad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in \mathbf{R}^+; \quad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi. \quad (3)$$

Die geforderte Bedingung der Ähnlichkeit von Dreieck $A_1B_1C_1$ zum «Formdreieck» $A_0B_0C_0$ besagt dann

$$\alpha_1 = \alpha_0; \quad \beta_1 = \beta_0; \quad \gamma_1 = \gamma_0. \tag{4}$$



Mit Hilfe der Skalarprodukte erhalten wir unter Berücksichtigung von (4) folgende Beziehungen

$$\vec{C_1A_1} \cdot \vec{C_1B_1} = |C_1A_1| \cdot |C_1B_1| \cdot \cos \gamma_0, \tag{5}$$

$$\vec{A_1B_1} \cdot \vec{A_1C_1} = |A_1B_1| \cdot |A_1C_1| \cdot \cos \alpha_0, \tag{6}$$

die zusammen mit (2) ein System von drei Gleichungen für die drei Unbekannten q, σ, τ darstellen. Unser Problem ist also auf die Lösbarkeit des Systems (2), (5) und (6) – und zwar mit Werten $q, \sigma, \tau \in \mathbb{R}^+$ – zurückgeführt.

Zur genaueren Untersuchung dieser Frage formen wir zunächst (5) um, indem wir die Koordinaten der Punkte einsetzen:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b}{1+q} - \frac{a+\tau b}{1+\tau} \right) \cdot \left(\frac{\sigma a}{1+\sigma} - \frac{a+\tau b}{1+\tau} \right) + \frac{qc}{1+q} \cdot \frac{c}{1+\sigma} \\ &= \sqrt{\left(\frac{b}{1+q} - \frac{a+\tau b}{1+\tau} \right)^2 + \left(\frac{qc}{1+q} \right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma a}{1+\sigma} - \frac{a+\tau b}{1+\tau} \right)^2 + \left(\frac{c}{1+\sigma} \right)^2} \cdot \cos \gamma_0. \end{aligned}$$

Elimination von σ mittels (2) ergibt nach elementarer Umformung:

$$\begin{aligned} & [(b^2+c^2) \cdot \tau^2 + 2(ab+c^2) \cdot \tau + (a^2+c^2)] \cdot q^2 - (b-a)^2 \\ &= \sqrt{[q \cdot (a+\tau b) - (b-a)]^2 + q^2 \cdot (1+\tau)^2 \cdot c^2} \\ & \cdot \sqrt{[q \cdot (a+\tau b) + (b-a)]^2 + q^2 \cdot (1+\tau)^2 \cdot c^2} \cdot \cos \gamma_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Verfährt man in analoger Weise mit Gleichung (6), so erhält man:

$$\begin{aligned} & [-(b^2+c^2)\cdot\tau^2+(a^2+c^2)]\cdot\varrho^2-2a(b-a)\cdot\varrho+(b-a)^2 \\ &= \sqrt{\{[a(1+\varrho)-b]+\varrho\tau b\}^2+\varrho^2\cdot(\tau+1)^2\cdot c^2} \\ & \cdot \sqrt{\{[a(1+\varrho)-b]-\varrho\tau b\}^2+\varrho^2\cdot(\tau-1)^2\cdot c^2}\cdot\cos\alpha_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Quadrieren von (7) und (8) würde zu zwei Folgegleichungen von der Form $P(\varrho, \tau) = 0$ und $Q(\varrho, \tau) = 0$ führen, wobei $P(\varrho, \tau)$, $Q(\varrho, \tau)$ im allgemeinen Polynome vom 8. Grad in den Variablen ϱ und τ darstellen. Das System $P(\varrho, \tau) = 0$ und $Q(\varrho, \tau) = 0$ hat zwar nach dem Bezoutschen Theorem $8 \cdot 8 = 64$ Lösungen (ϱ, τ) im Körper der komplexen Zahlen, unter denen sich auch – falls vorhanden – die Lösungen $(\varrho, \tau) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ von (7) und (8) befinden müssen, doch scheint eine Lösung des Problems auf diesem algebraischen Weg ziemlich aussichtslos. Trotzdem werden uns die Gleichungen (7) und (8) von Nutzen sein.

Im folgenden wird uns eine geometrisch-analytische Betrachtungsweise weiterführen. Zunächst beweisen wir

Lemma 1: Sei $C_1 \in]AB[$ beliebig gewählt. Dann gibt es stets genau ein dem Dreieck ABC einbeschriebenes Ceva-Dreieck $A_1B_1C_1$ mit $\gamma_1 = \gamma_0$.

Sei S (Fig. 1) der Transversalenschnittpunkt auf $]CC_1[$. Man erkennt unmittelbar: Läuft S auf $]CC_1[$ bei festem C_1 von C nach C_1 , so wächst γ_1 monoton von 0 bis π (Grenzen ausgenommen). Es gibt somit genau eine Lage von S auf $]CC_1[$ mit zugehörigem Winkel $\gamma_1 = \gamma_0$.

Wir denken uns nun den Winkel $\gamma_1 (= \gamma_0)$ fest gegeben. Jedem Punkt $C_1 \in]AB[$ ist dann nach Lemma 1 genau ein Punkt $A_1 \in]BC[$ und ein Punkt $B_1 \in]AC[$ so zugeordnet, dass Dreieck $A_1B_1C_1$ ein Ceva-Dreieck mit $\gamma_1 = \gamma_0$ ist. Da die Punkte C_1, A_1, B_1 eindeutig durch die Teilverhältnisse $\tau, \varrho, \sigma \in \mathbb{R}^+$ festgelegt sind, definiert Lemma 1 bei gegebenem γ_0 zwei Abbildungen:

$$\begin{aligned} \varrho: \mathbb{R}^+ \ni \tau &\mapsto \varrho(\tau) \in \mathbb{R}^+ \\ \sigma: \mathbb{R}^+ \ni \tau &\mapsto \sigma(\tau) \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \quad (9)$$

Wegen der Ceva-Bedingung: $\varrho(\tau) \cdot \sigma(\tau) \cdot \tau = 1$ können wir uns vorerst auf die Untersuchung der Funktion $\tau \mapsto \varrho(\tau)$ beschränken.

Von entscheidender Bedeutung für das folgende ist nun das Verhalten dieser Funktion $\tau \mapsto \varrho(\tau)$ für $\tau \rightarrow 0$ bzw. für $\tau \rightarrow +\infty$. Zunächst stellen wir fest: Für alle Paare $(\tau, \varrho(\tau)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ muss Gleichung (7) erfüllt sein; anders ausgedrückt:

Lemma 2: Gleichung (7) hat für jedes $\tau \in \mathbb{R}^+$ genau eine Lösung $\varrho = \varrho(\tau) \in \mathbb{R}^+$.

Als Lösung von (7) ist $\varrho(\tau)$ eine algebraische Funktion von τ , ist also an der Stelle $\tau = 0$ stetig. Es existiert somit $\lim_{\tau \rightarrow 0} \varrho(\tau) = \varrho(0) = \bar{\varrho}$ und wegen $\varrho(\tau) > 0$ für $\tau \in \mathbb{R}^+$ ist

$\bar{\varrho} \geq 0$. Wir zeigen, dass sogar $\bar{\varrho} > 0$ gilt. Nun genügt $\bar{\varrho} = \varrho(0)$ der Gleichung, die aus (7) für $\tau = 0$ hervorgeht:

$$(a^2 + c^2) \cdot \bar{\varrho}^2 - (b - a)^2 = \sqrt{[(a^2 + c^2) \bar{\varrho}^2 + (b - a)^2]^2 - 4 a^2 \cdot (b - a)^2 \bar{\varrho}^2} \cdot \cos \gamma_0. \quad (10)$$

Die Annahme $\bar{\varrho} = 0$ führt auf den Widerspruch:

$$-(b - a)^2 = (b - a)^2 \cdot \cos \gamma_0 \Rightarrow \cos \gamma_0 = -1 \Rightarrow \gamma_0 = \pi.$$

Damit haben wir

Lemma 3: $\lim_{\tau \rightarrow 0} \varrho(\tau) = \varrho(0) = \bar{\varrho} \in \mathbb{R}^+$.

Bezeichnen wir denjenigen Punkt auf $]BC[$, der dem Teilverhältnis $\bar{\varrho} > 0$ zugeordnet ist, mit \bar{A}_1 , so erhalten wir

Lemma 4: Bei festem Winkel $\gamma_1 = \gamma_0$ strebt für $\tau \rightarrow 0$ (also $C_1 \rightarrow A$) der Punkt A_1 des Ceva-Dreiecks gegen einen (von γ_0 abhängigen) Grenzpunkt $\bar{A}_1 \in]BC[$, der dem Teilverhältnis $\bar{\varrho} = \varrho(0) \in \mathbb{R}^+$ (vgl. Lemma 3) entspricht. Kurz:

$$\lim_{C_1 \rightarrow A} A_1 = \bar{A}_1 \in]BC[. \quad (11)$$

Aus Analogiegründen können wir die Eigenschaften der Abbildung (9) $\tau \mapsto \varrho(\tau)$ auf die Abbildung $\tau \mapsto \sigma(\tau)$ übertragen. Dem Grenzprozess $C_1 \rightarrow A$ ($\tau \rightarrow 0$) entspricht dabei der Grenzprozess $C_1 \rightarrow B$ ($\tau \rightarrow +\infty$). Wir erhalten so

Lemma 5: Bei festem Winkel $\gamma_1 = \gamma_0$ strebt für $\tau \rightarrow +\infty$ (also $C_1 \rightarrow B$) der Punkt B_1 des Ceva-Dreiecks gegen einen (von γ_0 abhängigen) Punkt $\bar{B}_1 \in]AC[$, der einem gewissen Teilverhältnis $\bar{\sigma} \in \mathbb{R}^+$ entspricht. Kurz:

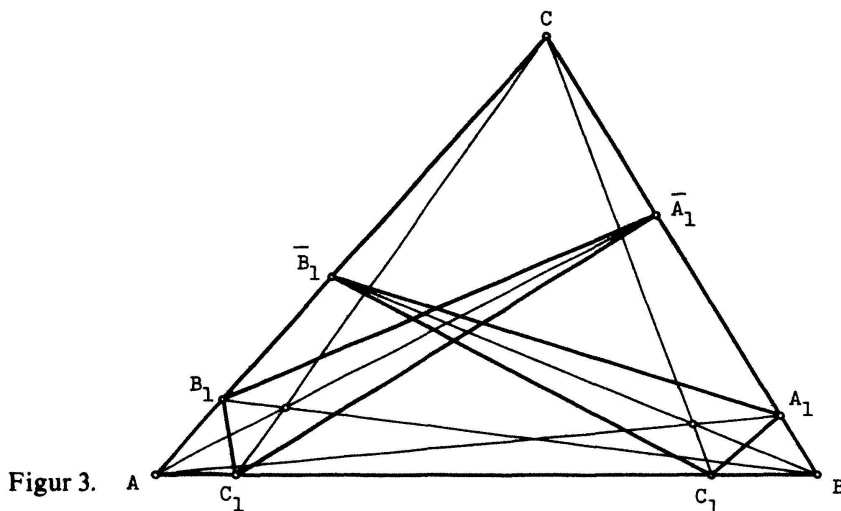
$$\lim_{C_1 \rightarrow B} B_1 = \bar{B}_1 \in]AC[. \quad (12)$$

Wegen $\lim_{\tau \rightarrow 0} \varrho(\tau) = \bar{\varrho} \in \mathbb{R}^+$, $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \sigma(\tau) = \bar{\sigma} \in \mathbb{R}^+$ ergeben sich aus der Ceva-Bedingung $\varrho(\tau) \cdot \sigma(\tau) \cdot \tau = 1$ die weiteren Grenzwerte: $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varrho(\tau) = 0$; $\lim_{\tau \rightarrow 0} \sigma(\tau) = +\infty$. Damit haben wir

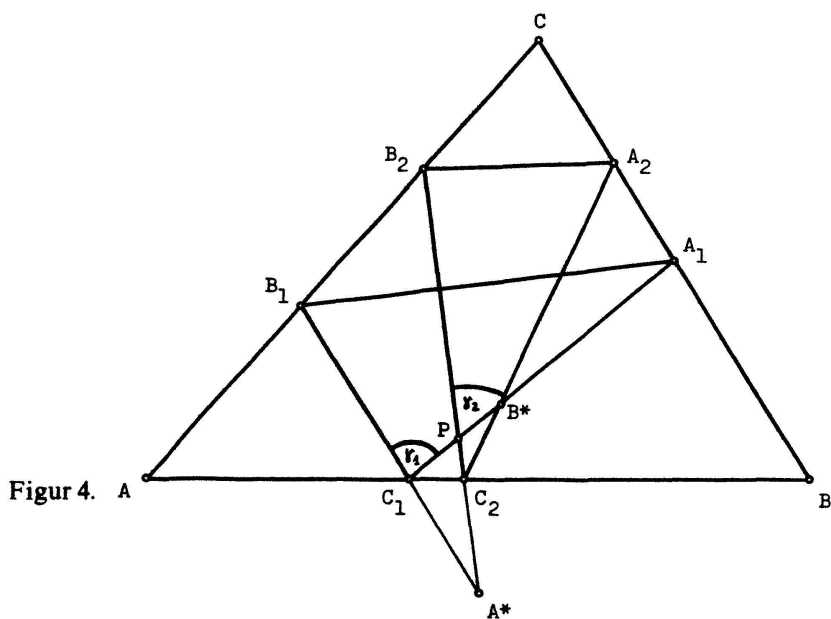
Lemma 6: Bei festem $\gamma_1 = \gamma_0$ strebt für $\tau \rightarrow +\infty$ (also $C_1 \rightarrow B$) der Punkt A_1 des Ceva-Dreiecks gegen B , für $\tau \rightarrow 0$ (also $C_1 \rightarrow A$) der Punkt B_1 des Ceva-Dreiecks gegen A . Kurz:

$$\lim_{C_1 \rightarrow B} A_1 = B; \quad \lim_{C_1 \rightarrow A} B_1 = A. \quad (13)$$

Figur 3 möge diese Grenzfälle des Ceva-Dreiecks für $C_1 \rightarrow A$ bzw. $C_1 \rightarrow B$ verdeutlichen.



Figur 3.



Figur 4.

Betrachten wir nun die Winkel α_1 und β_1 des Ceva-Dreiecks, die an den Ecken A_1 bzw. B_1 auftreten, in Abhängigkeit von τ ; dabei sei nach wie vor der Winkel γ_1 bei C_1 festgehalten: $\gamma_1 = \gamma_0$. Aus Figur 3 ist unmittelbar ersichtlich, dass für $\tau \rightarrow 0$ (also $C_1 \rightarrow A$) der Winkel α_1 gegen 0 konvergiert, ebenso der Winkel β_1 für $\tau \rightarrow +\infty$ (also $C_1 \rightarrow B$). Also

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \alpha_1 = 0; \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \beta_1 = 0; \quad \gamma_1 = \gamma_0. \tag{14}$$

Wegen $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi$ und $\gamma_1 = \gamma_0$ folgt daraus weiter

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \alpha_1 = \pi - \gamma_0; \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \beta_1 = \pi - \gamma_0. \tag{15}$$

Wir haben somit (bei festem $\gamma_1 = \gamma_0$) eine Abbildung, die jedem $\tau \in \mathbb{R}^+$ zwei Winkel $\alpha_1(\tau), \beta_1(\tau)$ zuordnet, die als Dreieckswinkel der Bedingung genügen:

$$0 < \alpha_1(\tau), \beta_1(\tau) < \pi - \gamma_0. \tag{16}$$

Diese Abbildung ist aus geometrischen Gründen stetig; daher folgt aus (14) und (15) nach dem Zwischenwertsatz, dass die beiden Funktionen

$$\mathbb{R}^+ \ni \tau \mapsto \alpha_1(\tau) \in]0, \pi - \gamma_0[; \quad \mathbb{R}^+ \ni \tau \mapsto \beta_1(\tau) \in]0, \pi - \gamma_0[\tag{17}$$

surjektiv sind. Zu gegebenem Winkel $\alpha_0 \ni]0, \pi - \gamma_0[$ gibt es also mindestens ein $\tau_0 \in \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft $\alpha_1(\tau_0) = \alpha_0$, womit automatisch auch $\beta_1(\tau_0) = \beta_0$ erfüllt ist. Damit ist der Existenznachweis eines Ceva-Dreiecks $A_1B_1C_1 \sim A_0B_0C_0$ erbracht.

Die *Eindeutigkeit* soll nun auf geometrischem Wege nachgewiesen werden. Dazu beweisen wir folgenden Satz 2, aus dem die Eindeutigkeitsaussage von Satz 1 unmittelbar hervorgeht.

Satz 2: *Zwei demselben Dreieck ABC einbeschriebene zueinander ähnliche Ceva-Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ sind identisch.*

Beweis: Haben die beiden Ceva-Dreiecke einen Eckpunkt gemeinsam, etwa $C_1 = C_2$, so folgt unmittelbar aus Lemma 1, dass dann auch gilt: $A_1 = A_2$ und $B_1 = B_2$. Wir können also für das folgende annehmen: $A_1 \neq A_2, B_1 \neq B_2, C_1 \neq C_2$. Analog zu (1) sei

$$\begin{aligned} [ABC_i] &= -\tau_i < 0; & [BCA_i] &= -\varrho_i < 0; \\ [CAB_i] &= -\sigma_i < 0; & \varrho_i \cdot \sigma_i \cdot \tau_i &= 1; \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \tag{18}$$

Wegen $A_1 \neq A_2, \dots$ gilt dann: $\varrho_1 \neq \varrho_2, \sigma_1 \neq \sigma_2, \tau_1 \neq \tau_2$. Nun sind wegen $\varrho_i \cdot \sigma_i \cdot \tau_i = 1, (i = 1, 2)$ die beiden Fälle $\varrho_1 < \varrho_2, \sigma_1 < \sigma_2, \tau_1 < \tau_2$ bzw. $\varrho_1 > \varrho_2, \sigma_1 > \sigma_2, \tau_1 > \tau_2$ ausgeschlossen. Bleiben also nur die Möglichkeiten, dass zweimal das «<»-Zeichen und einmal das «>»-Zeichen steht oder umgekehrt. Durch Vertauschung der Indizes 1, 2 und gegebenenfalls durch Umbenennung der Eckpunkte kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass gilt: $\tau_1 < \tau_2, \varrho_1 < \varrho_2, \sigma_1 > \sigma_2$. Es gelten also (Fig. 4) die Zwischenrelationen:

$$\langle AC_1C_2 \rangle; \quad \langle BA_1A_2 \rangle; \quad \langle CB_2B_1 \rangle. \tag{19}$$

Mehrmalige Anwendung des Axioms von Pasch auf geeignete Teildreiecke in Figur 4 liefert die Existenz der Schnittpunkte A^*, B^*, P mit den Anordnungsbeziehungen

$$\langle A^*C_1B_1 \rangle, \quad \langle A^*C_2P \rangle, \quad \langle C_1PB^* \rangle. \tag{20}$$

Daraus folgt mittels des Satzes vom Aussenwinkel, angewandt auf die Dreiecke C_1PA^* und C_2PB^* :

$$\gamma_1 = \sphericalangle B_1C_1P > \sphericalangle C_1PC_2 > \sphericalangle PC_2B^* = \gamma_2. \tag{21}$$

Die Annahme $A_1 \neq A_2, B_1 \neq B_2, C_1 \neq C_2$ führt also auf $\gamma_1 > \gamma_2$, d. h. dass die beiden Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ nicht ähnlich sind, im Widerspruch zur Voraussetzung von Satz 2. Dieser ist damit bewiesen.

Aus Satz 1 ergibt sich durch Umdeutung folgender

Satz 3: Gegeben seien zwei Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_0B_0C_0$. Dann gibt es genau ein zu $A_0B_0C_0$ ähnliches Dreieck ABC , in dem $A_1B_1C_1$ Ceva-Dreieck ist.

Beweis: Man konstruiere zu $A_0B_0C_0$ das nach Satz 1 existierende Ceva-Dreieck $A_1^*B_1^*C_1^*$, das zu $A_1B_1C_1$ ähnlich ist und führe dann durch eine Ähnlichkeitstransformation $A_1^*B_1^*C_1^*$ in $A_1B_1C_1$ über. Dabei geht $A_0B_0C_0$ in ein zu ihm ähnliches Dreieck ABC über. Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 2.

Schliesslich merken wir noch eine weitere Folgerung aus Satz 1 an:

Satz 4: Das Gleichungssystem (7), (8) hat unter den Bedingungen (3) genau eine Lösung $(\varrho, \tau) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Dieser Satz 4 gibt uns ein Verfahren in die Hand, bei gegebenen Dreiecken ABC und $A_0B_0C_0$ das zugehörige Ceva-Dreieck $A_1B_1C_1$ näherungsweise zu berechnen, indem man das System (7), (8) – etwa nach dem zweidimensionalen Newton-Verfahren – nach ϱ und τ auflöst. So erhält man z.B. für $a=0, b=c=1$ (gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck) und $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}; \beta_0 = \frac{\pi}{3}; \gamma_0 = \frac{\pi}{2}$ (Zeichendreieck) die Näherungswerte $\tau \approx 0,3234; \varrho \approx 0,7340$ und damit die Eckpunkte $A_1(0,5767 | 0,4233); C_1(0,2444 | 0)$.

Zum Abschluß sei noch auf einen Zusammenhang des hier behandelten Problems mit der Theorie der Sechseck-Gewebe hingewiesen [1*], auf den mich Herr Jeger aufmerksam gemacht hat. Sei Δ die Menge der Punkte im Inneren des Dreiecks ABC . Jeder Punkt $S \in \Delta$ definiert genau ein dem Dreieck ABC einbeschriebenes Ceva-Dreieck $A_1B_1C_1$ mit S als Transversalenschnittpunkt. Sind $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Winkel dieses Dreiecks $A_1B_1C_1$ (Fig. 2), so werden also jedem $S \in \Delta$ drei Zahlen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in \mathbb{R}^+$ mit $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi$ zugeordnet. Betrachten wir nun in Δ die Kurven für S , längs denen jeweils einer der drei Dreieckswinkel konstant ist (α_0 bzw. β_0 bzw. γ_0):

$$\begin{aligned} K_\alpha: & \{S \in \Delta \mid \alpha_1 = \alpha_0\}; & 0 < \alpha_0 < \pi \\ K_\beta: & \{S \in \Delta \mid \beta_1 = \beta_0\}; & 0 < \beta_0 < \pi \\ K_\gamma: & \{S \in \Delta \mid \gamma_1 = \gamma_0\}; & 0 < \gamma_0 < \pi. \end{aligned} \quad (22)$$

Durch jeden Punkt $S \in \Delta$ geht jeweils genau eine Kurve aus jeder der drei Scharen (22). Satz 2 besagt, dass sich zwei Kurven verschiedener Scharen in höchstens einem Punkt schneiden. (22) bildet daher ein sogenanntes Kurvengewebe. Sei nun in einer $(\alpha_1 | \beta_1)$ -Ebene das Gebiet

$$W = \{(\alpha_1 | \beta_1) \mid \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}^+ \wedge \alpha_1 + \beta_1 < \pi\} \quad (23)$$

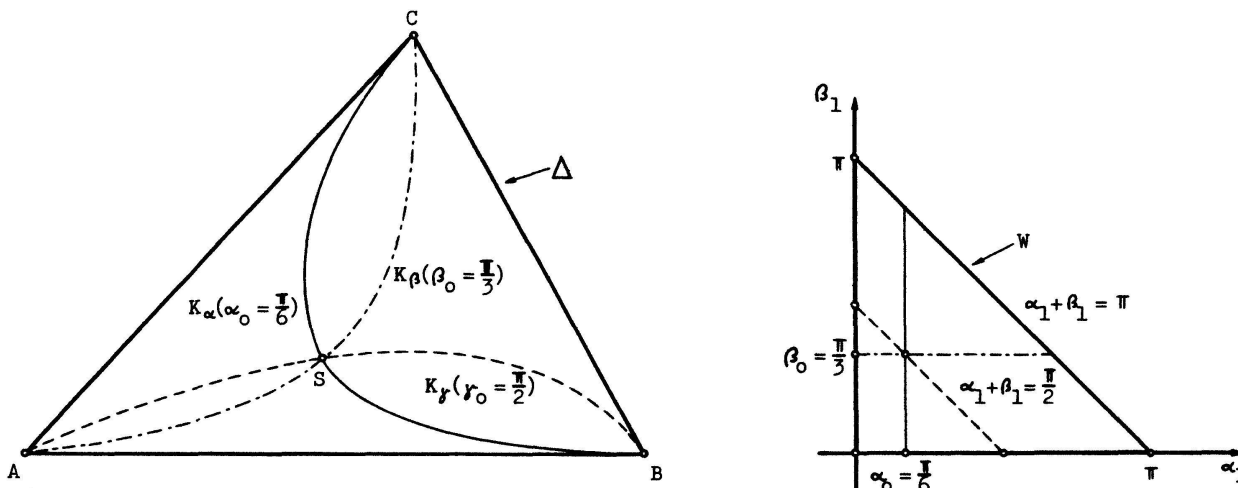
gegeben. Jedem $S \in \Delta$ ist nach den obigen Überlegungen ein Tripel $(\alpha_1 | \beta_1 | \gamma_1)$ mit $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi$, also genau ein Punkt $(\alpha_1 | \beta_1) \in W$ zugeordnet. Die Abbildung

$$F: \Delta \ni S \mapsto (\alpha_1 | \beta_1) \in W \quad (24)$$

ist nach Satz 1 bijektiv, es existiert also auch $F^{-1}: W \rightarrow \Delta$.

Da F, F^{-1} aus geometrischen Gründen stetig sind, ist $F^{-1}: W \rightarrow \Delta$ eine topologische Abbildung. Die Kurven $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma$ in Δ erweisen sich somit als topologische Bilder folgender drei Parallelenscharen in W :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_0 \wedge 0 < \beta_1 < \pi - \alpha_0 \\ \beta_1 &= \beta_0 \wedge 0 < \alpha_1 < \pi - \beta_0 \\ \alpha_1 + \beta_1 &= \pi - \gamma_0 \wedge 0 < \alpha_1 < \pi - \gamma_0. \end{aligned} \tag{25}$$



Figur 5.

Ein Kurvengewebe, dessen Scharen die topologischen Bilder von drei Parallelenscharen sind, heisst ein *Sechseck-Gewebe*. Das Verhalten der Kurven $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma$ in der Nähe der Eckpunkte A, B, C kann aus Figur 4 erschlossen werden. Die Figur 5 zeigt je eine Kurve $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma$ der drei Scharen des Sechseck-Gewebes in Δ sowie ihre topologischen Urbilder (25) in W . Man erhält zu gegebenen Werten $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ den Punkt S als Schnittpunkt der drei Kurven $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma$ und mit S auch das gesuchte Ceva-Dreieck.

Für die Reinzeichnung der Figuren möchte ich Herrn *P. Schöbi* (ETH-Zürich) herzlich danken.

K. Seebach
Universität München, Math. Institut

ANMERKUNG

[1*] Vgl. W. Blaschke und G. Bol: Geometrie der Gewebe; Grundlehren der math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. XLIX; Berlin 1938.