

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 42 (1987)  
**Heft:** 4  
  
**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**The diophantine equation  $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = (z^2 - 1)^2$ : a footnote**

After my paper [1] had appeared, I noticed that the solution

$$(x, y, z) = (155, 48\,049, 2\,729)$$

given therein can be deduced from a result of Szymiczek's on triangular numbers in geometric progression, mentioned in [2].

A triangular number is an integer of the form  $t_n = n(n+1)/2$ , with  $n$  a positive integer. Szymiczek's result is that  $t_{77}$ ,  $t_{1364}$ ,  $t_{24024}$  are in geometric progression, that is,

$$t_{77} \cdot t_{24024} = (t_{1364})^2.$$

This can be written as

$$\begin{aligned} \{(2 \cdot 77 + 1)^2 - 1\} \{(2 \cdot 24024 + 1)^2 - 1\} &= \{(2 \cdot 1364 + 1)^2 - 1\}^2, \\ (155^2 - 1)(48\,049^2 - 1) &= (2\,729^2 - 1)^2. \end{aligned}$$

Shoichi Hirose, Mita High School, Tokyo, Japan

## REFERENCES

- 1 S. Hirose: On a diophantine equation  $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = (z^2 - 1)^2$ . El. Math. 42, 1-3 (1987).
- 2 D.A.Q.: Triangular square numbers: a postscript. Math. Gaz. 56, 311-314 (1972).

© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/87/040109-01\$1.50+0.20/0

# Aufgaben

**Aufgabe 944.** Für  $p > 1$  bestimme man

$$\sup \left\{ - \int_0^1 f(x) \log x \, dx \mid \int_0^1 \left( x^{-1} \int_0^x |f(t)| \, dt \right)^p dx \leq 1 \right\}.$$

A. A. Jagers, Enschede, NL

**Lösung:** Ist  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist die durch

$$F(x) := \begin{cases} |f(0)| & \text{für } x = 0, \\ \frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| \, dt & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

in  $[0, 1]$  definierte, nicht negative Funktion  $F$  stetig. Mit  $G(x) := 1$  in  $[0, 1]$  sowie  $q := p/(p-1) > 0$  gilt bei beliebigem  $\varepsilon > 0$  nach der Hölderschen Ungleichung für Integrale

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 \left( \int_0^x |f(t)| dt \right) \frac{dx}{x} &= \int_{\varepsilon}^1 F(x) G(x) dx \leq \left( \int_{\varepsilon}^1 F(x)^p dx \right)^{1/p} \left( \int_{\varepsilon}^1 G(x)^q dx \right)^{1/q} \\ &= (1-\varepsilon)^{1/q} \left( \int_{\varepsilon}^1 \left( \frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \right)^p dx \right)^{1/p} \leq (1-\varepsilon)^{1/q}. \end{aligned} \quad (1)$$

Dabei wurde für die letzte Ungleichung die Bedingung

$$\int_0^1 \left( \frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \right)^p dx \leq 1 \quad (2)$$

benützt, unter der das Supremum zu bilden ist. Mittels partieller Integration erkennt man, dass die linke Seite in (1) gleich

$$(\log x) \int_0^x |f(t)| dt \Big|_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 |f(x)| \log x dx = -F(\varepsilon) \varepsilon \log \varepsilon + \int_{\varepsilon}^1 |f(x)| \log \frac{1}{x} dx \quad (3)$$

ist. Wegen  $\varepsilon \log \varepsilon \rightarrow 0$  bei  $\varepsilon \downarrow 0$  sieht man aus (1) und (3), dass unter der Bedingung (2) die Ungleichungen

$$-\int_0^1 f(x) \log x dx \leq \int_0^1 |f(x)| \log \frac{1}{x} dx \leq 1$$

gelten, weshalb das gesuchte Supremum höchstens Eins ist. Andererseits genügt die Funktion  $f(x) = 1$  der Bedingung (2) ebenso wie  $-\int_0^1 f(x) \log x dx = 1$  und so ergibt sich das fragliche Supremum zu Eins (und das Supremum ist ein Maximum).

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten Kee-wai Lau (Honkong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), H.-J. Seiffert (Berlin (W)).

**Aufgabe 945.** Man bestimme den geometrischen Ort der Spitzen aller quadratischen Kegel, welche durch 6 bzw. 7 gegebene Punkte hindurchgehen.

B. L. v. d. Waerden, Zürich

**Lösung:** Bekanntlich bilden alle Flächen 2. Ordnung, welche durch 7 gegebene Punkte hindurchgehen, ein Bündel. Sind  $a = b = c = 0$  die Gleichungen dreier (Grund-)Flächen des Bündels, so lässt sich die Gleichung des Flächenbündels in der

Form  $a + \lambda b + \mu c = 0$  ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ) darstellen. Die Spitzen der im Flächenbündel enthaltenen (quadratischen) Kegel liegen dann auf der Kernkurve (Hessesche, Jacobi-sche, Steinersche oder Quadrupel-Kurve) des Bündels, was in diesem Fall eine Raumkurve 6. Ordnung ist. Ihre Gleichung bekommt man durch Nullsetzen der von  $a$ ,  $b$  und  $c$  bestimmten Funktionaldeterminante.

Entsprechend definieren 4 (nicht einem Bündel angehörige) Flächen 2. Ordnung  $a = b = c = d = 0$  ein Gebüsch mit der Parametergleichung  $a + \lambda b + \mu c + \nu d = 0$  ( $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ ).

In diesem Fall ist der Ort der Spitzen der dem Flächengebüsch angehörigen (quadratischen) Kegel eine Fläche 4. Ordnung, die Kernfläche des Gebüschs, deren Gleichung man wieder durch Nullsetzen der Funktionaldeterminante von  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  gewinnen kann.

Gehen die Flächen des Gebüschs, wie in der Aufgabe verlangt, speziell durch 6 vorgegebene Grundpunkte, so enthält die erwähnte Kernfläche im besonderen alle 15 Kanten, welche diese Grundpunkte bestimmen.

Hj. Stocker (Wädenswil, ZH)

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht), L. Kuipers (Sierre, Teil-lösung), G. Unger (Dornach).

**Aufgabe 946.** Die Summe

$$S_n := \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{2^k (n+k+1)}$$

ist geschlossen auszuwerten.

M. Vowe, Therwil

**Lösung:** Offensichtlich ist

$$S_n = \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{n-1} t^n dt$$

und nach der Substitution  $t = 2x$  erhält man

$$S_n = 2^{n+1} \int_0^{1/2} (1-x)^{n-1} x^n dx. \quad (1)$$

Nun gilt (man ersetze  $x$  durch  $1-x$ )

$$\int_0^{1/2} (1-x)^{n-1} x^n dx = \int_{1/2}^1 x^{n-1} (1-x)^n dx \quad (2)$$

sowie (man integriere partiell)

$$\int_0^{1/2} (1-x)^{n-1} x^n dx = -\frac{1}{n 2^{2n}} + \int_0^{1/2} x^{n-1} (1-x)^n dx. \quad (3)$$

Addition von (2) und (3) ergibt wegen (1)

$$S_n = 2^n \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^n dx - \frac{1}{n 2^n}.$$

Mit dem bekannten Wert des letzten Integrals bekommt man den geschlossenen Ausdruck

$$S_n = 2^n \frac{(n-1)! n!}{(2n)!} - \frac{1}{n 2^n}.$$

H.-J. Seiffert, Berlin, BRD

Weitere Lösungen sandten O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), K. Dilcher (Halifax, CD; 2 Lösungen), F. Götze (Jena, DDR), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hongkong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Chr. A. Meyer (Bern), I. Paasche (Stockdorf, BRD), A. Sharma und N. Sivakumar (Alberta, CD), Tsen-Pao Shen (München, BRD), M. H. M. Smid (Tilburg, NL), Hj. Stocker (Wädenswil), K. Warneke (Vechta, BRD), C. Wildhagen (Breda, NL), H. Widmer (Rieden), R. Wyss (Flumenthal).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis *10. Februar 1988* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68), Problem 872 A (Band 36, S. 175).

**Aufgabe 965.** Einer Parabel sei eine Folge von sie doppelt berührenden Kreisen  $K_1, K_2, \dots$  einbeschrieben, wobei  $K_1$  der Scheitelkrümmungskreis sei und jeder der Kreise den folgenden berühre. Man ermittle für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  das Verhältnis  $r_n/r_1$  ( $r_i$  = Radius von  $K_i$ ).

C. Bindschedler, Küsnacht

**Aufgabe 966.** Für ungerade  $n \in \mathbb{N}$  bestimme man den Wert der Summe

$$\sum_{i=0}^{(n-1)/2} (-1)^i \binom{n}{i} (n-2i).$$

P. von Siebenthal, Zürich

**Aufgabe 967.** Auf der Parabel  $p: y = x^2$  liegen im allgemeinen zwei Punkte  $S_{1,2}$  mit der Eigenschaft, dass die Spiegelbilder  $p_{1,2}^*$  von  $p$  bezüglich  $S_{1,2}$  durch einen vorgegebenen Punkt  $P$  verlaufen. Bestimme zu variablem  $P \in p$  die Enveloppe der Schar der gemeinsamen Tangenten von  $p_1^*$  und  $p_2^*$ .

Hj. Stocker, Wädenswil

**Aufgabe 968.** Es sei  $f$  eine rationale Funktion der komplexen Variablen  $z$  mit genau einem Pol und einer Nullstelle, die beide den Betrag 1 haben. Überdies sei  $f(0) = 1$ .  $F$  sei die Menge dieser rationalen Funktionen  $f$ . Man finde die untere Grenze des Realteils von  $f(z)$ , wenn  $z$  ein fester Punkt innerhalb des Einheitskreises ist und  $f$  die Menge  $F$  durchläuft.

A. Pfluger, Zürich

## Literaturüberschau

H. R. Schwarz: Numerische Mathematik. 500 Seiten, 88 Bilder und 131 Beispiele, DM 46,—. B. G. Teubner, Stuttgart 1986.

Für Tausende von Studenten war E. Stiefels «Einführung in die numerische Mathematik» ein Musterbeispiel eines klar und ausführlich geschriebenen Buches. H. R. Schwarz hat Stiefels Buch auf dessen Wunsch hin von Grund auf neu geschrieben und den neueren Erkenntnissen und Bedürfnissen angepasst. Dabei hat er sich mit Erfolg bemüht, den Stiefelschen Stil (Klarheit und Ausführlichkeit) beizubehalten.

Das Buch behandelt auf etwa 500 Seiten (Stiefels Buch ist halb so dick!) alle Aspekte der numerischen Mathematik. Es kann als Lehrbuch oder Nachschlagewerk verwendet werden. Wegen der klaren Darstellung und der vielen Beispiele ist es für verschiedenartige Leser geeignet: Mathematiker, Physiker, Ingenieure, Naturwissenschaftler.

F. Bachmann

C. Camacho, A. Lins Neto: Geometric theory of foliations. 205 Seiten, Fr. 84.—. Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart 1985.

Ce livre est la traduction anglaise, avec quelques améliorations, de «Teoria geométrica das folheações, No 12, Impa – CNPq (1979)».

On y expose les bases de la théorie des feuilletages, ainsi que quelques résultats avancés (théorème de stabilité, théorème de Haefliger, théorème de Novikov), en commençant par la théorie élémentaire des variétés différentiables.

Cette première partie comporte des renvois à d'autres ouvrages, mais cela ne gêne aucunement la lecture. Les chapitres dont la lecture est difficile sont précédés par un paragraphe donnant une idée intuitive de ce qui va suivre. On y trouve aussi la discussion de beaucoup de résultats qui prolongent ou complètent ceux traités dans ce livre.

Écrit dans un style très direct, cet ouvrage constitue une excellente introduction à la théorie des feuilletages, utile autant à des étudiants avancés désirant s'initier au sujet qu'à des mathématiciens qui voudraient compléter leur culture.

F. Ronga